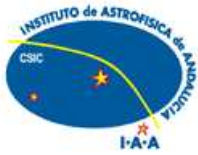


# **El Problema de la Energía Oscura en la Nueva Cosmología Estándar**

José Antonio Jiménez Madrid

Granada, 2006





DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA  
UNIVERSIDAD DE GRANADA

INSTITUTO DE ASTROFÍSICA DE ANDALUCÍA  
CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA FUNDAMENTAL  
CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

# El Problema de la Energía Oscura en la Nueva Cosmología Estándar

Directores de Tesis:

Dr. D. **Pedro Félix González Díaz**  
Profesor de investigación del CSIC  
Dr. D. **Víctor Aldaya Valverde**  
Investigador Científico del CSIC

Tutor:

Dr. D. **José Carlos Rosáles González**  
Profesor Titular del Departamento de  
Álgebra de la Universidad de Granada

**Memoria presentada para optar al grado de  
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

José Antonio Jiménez Madrid

Granada, 2006



**A mis padres**



# Agradecimientos

Me gustaría mostrar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que de alguna manera han contribuido en el desarrollo de este trabajo.

Deseo, en primer lugar, expresar mi agradecimiento a mis directores de Tesis, Pedro F. González Díaz y Víctor Aldaya Valverde, por su dirección, confianza y paciencia durante estos cuatro años, además de los sabios consejos que me han dado durante todo el proceso de realización de esta tesis doctoral.

Quiero agradecer el apoyo que en recibido en las distintas fases de este trabajo por parte de Carlos Barceló Serón, Manuel Calixto Molina, Julio Guerrero García, Luis Garay y Guillermo Mena. Su ayuda ha sido importante para el desarrollo de esta tesis, en especial la brindada por Carlos Barceló quien me guió en mis primeros pasos en el mundo de la Cosmología.

Agradezco a todo el personal del Instituto de Astrofísica de Andalucía e Instituto de Matemática y Física Fundamental (CSIC) por la ayuda ofrecida y el buen ambiente de trabajo presente en los centros.

También deseo mencionar la hospitalidad y la cálida acogida que tuve del Institute of Cosmology and Gravitation de la Universidad de Portsmouth donde realicé una estancia.

Al extinto Ministerio de Ciencia y Tecnología por la concesión de la beca predoctoral I3P que me ha permitido realizar este trabajo de investigación.

A Mariam Bouhmadi López su paciencia durante la que fue mi primera colaboración y ofrecer su amistad.

Ahora recordaré aquí a todas las personas que han contribuido en proporcionar ánimos y apoyo durante todo el tiempo que ha durado el desarrollo de este trabajo.

Comenzaré mostrando mi agradecimiento a mis compañeros de despacho de Granada: a Dani para que continúe manteniendo la ya famosa “deuda histórica” y sigamos reuniéndonos para intentar liquidarla algún día. A Pepe por el ya conocido “... de la verdad” y compañía en diversos viajes. A Simón por compartir sus

conocimientos artísticos e informáticos, los cuales le han hecho famoso como el experto del renombrado de archivos con el comando “rm”. A Pablo por permitirnos deleitarnos con sus flautas y alegres cánticos, los cuales espero que vuelvan a sonar algún día. A Eduardo por compartir sus zapateos y animar el día a día en el despacho. Continuaré con mis compañeros de despacho de Madrid: Prado, Salvador y Alberto, por las interesantísimas tertulias del té.

Tampoco quiero olvidar a la conocida “Comunidad del té” por todas las meriendas que hemos compartido en la cafetería.

A Vega, Esther, María, Arantxa y Zuzana por su amistad y compartir momentos tan agradables ya sea en Madrid o en lugares tan exóticos como Santorini.

Se merece recordar aquí a la “Sierra de los Bicarios”, grupo con el cual he compartido múltiples aventuras, ya sea disfrutando de la Naturaleza o “acampando” en la civilización. En particular a los miembros más activos del grupo como son Don Pepe y el señor secretario, aunque tampoco olvido a los demás: Noe, Geli, Rosalía, Edu, Juande, . . .

No quiero olvidar a mis compañeros de la Universidad como Migue, Magdalena y Txiqui con quienes compartí mi paso por la Universidad tanto en el transcurso de la carrera como en los cursos de doctorado.

En particular, deseo expresar mi agradecimiento a dos personas muy especiales: Mari Carmen y Mila, las cuales siempre me han brindado su amistad y transmitido ánimos constantemente.

En especial a toda mi familia por su cariño, consejos y continuo apoyo durante todo este tiempo. Gracias.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.1.1. La expansión acelerada del Universo . . . . .	2
1.1.2. Energía oscura: Modelos . . . . .	3
1.1.3. Gravedad Modificada . . . . .	4
1.1.4. Interacción de la energía oscura con objetos astronómicos	5
1.1.5. Evolución del Universo: inflación, superaceleración y futuro	5
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	12
1.3. Objetivos de este trabajo . . . . .	12
1.4. Metodología . . . . .	13
<b>2. Quintaesencia en espacio-tiempos de FLRW</b>	<b>15</b>
2.1. Introducción . . . . .	15
2.2. Energía oscura . . . . .	17
2.3. Energía fantasma . . . . .	19
2.4. Campo escalar acoplado conformemente a la Gravedad . . . . .	26
2.5. Resumen y comentarios . . . . .	28
<b>3. Modelo generalizado de Chaplygin: Singularidades futuras</b>	<b>31</b>
3.1. Introducción . . . . .	31
3.2. Gas de Chaplygin generalizado y energía fantasma . . . . .	32
3.3. Gas de Chaplygin generalizado fantasma y campos escalares . . . . .	37
3.4. Un modelo fenomenológicamente viable . . . . .	45
3.5. Resumen y comentarios . . . . .	45
<b>4. Modelo generalizado de Chaplygin: ¿Futuro cósmico acronal?</b>	<b>47</b>
4.1. Introducción . . . . .	47
4.2. Agujeros de gusano clásicamente estables . . . . .	48
4.3. Acreción de energía oscura en agujeros de gusano . . . . .	49

4.4.	Agujeros de gusano en un gas de Chaplygin generalizado . . . . .	51
4.5.	Resumen y comentarios . . . . .	55
<b>5.</b>	<b>Inflación primordial fantasma</b>	<b>57</b>
5.1.	Introducción . . . . .	57
5.2.	Un modelo Multiverso . . . . .	58
5.3.	Salida del periodo inflacionario . . . . .	63
5.4.	Resumen y comentarios . . . . .	71
<b>6.</b>	<b>Acreción de energía oscura en agujeros negros de Kerr-Newman</b>	<b>73</b>
6.1.	Introducción . . . . .	73
6.2.	Generalización del modelo de acreción a agujeros negros de Kerr-Newman . . . . .	74
6.3.	Modelos cosmológicos . . . . .	79
6.3.1.	Modelos de quintaesencia . . . . .	80
6.3.2.	Gas de Chaplygin generalizado . . . . .	84
6.3.3.	La conjetura de la censura cósmica y la super-radiancia . . . . .	91
6.4.	Modelo aproximado . . . . .	94
6.5.	Resumen y comentarios . . . . .	96
<b>7.</b>	<b>Acreción en cuerdas cósmicas con wiggles</b>	<b>99</b>
7.1.	Introducción . . . . .	99
7.2.	Flujo hacia el núcleo de una cuerda . . . . .	101
7.3.	Acreción de energía oscura en cuerdas cósmicas rectas con wiggles	104
7.3.1.	Quintaesencia y K-Esencia . . . . .	106
7.3.2.	Gas de Chaplygin generalizado . . . . .	107
7.4.	Resumen y comentarios . . . . .	108
<b>8.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>111</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>115</b>
<b>A.</b>	<b>Funciones hipergeométricas</b>	<b>115</b>
<b>B.</b>	<b>Expresión explícita de <math>R_{\min}</math></b>	<b>117</b>
<b>C.</b>	<b>Notaciones usadas en este trabajo</b>	<b>119</b>

# Índice de figuras

1.1.	Evolución de nuestro Universo desde el Big Bang hasta el presente. . . .	11
2.1.	Podemos ver la evolución del factor de escala respecto del tiempo. $t_{\infty 0}$ señala el tiempo el el cual ocurre el big rip. . . . .	21
2.2.	Esta figura muestra el comportamiento del tiempo cósmico en el que se alcanza el big rip respecto del parámetro $w$ dado por el cociente entre la presión y la densidad de energía de la energía fantasma. La línea discontinua corresponde al caso de un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con secciones hiperbólicas. La línea continua corresponde con un espacio-tiempo homogéneo e isótropo con geometría espacial esférica. El tiempo cósmico se ha dividido por $C^{1/(3w+1)}$ .	24
2.3.	Esta figura muestra el comportamiento del tiempo cósmico en el que ocurre el big rip como una función de la constante cosmológica. Como muestra la gráfica, se tiene un valor mayor de $\tilde{t}$ cuando no hay constante cosmológica. De hecho, cuanto mayor sea $\tilde{\Lambda}$ , antes ocurre el big rip. La constante cosmológica y el tiempo cósmico han sido redefinidos por cantidades adimensionales dadas por $\tilde{\Lambda}/(CR_0^{-3(1+w)})$ y $-(3/2)(1+w)\sqrt{CR_0^{-3(1+w)/2}}(\tilde{t}-t_0)$ , respectivamente. . . . .	25
2.4.	Esta figura muestra el comportamiento del tiempo cósmico en el que se alcanza el big rip respecto del parámetro $w$ para el caso de un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con un campo escalar acoplado conformemente a la Gravedad. El tiempo cósmico se ha dividido por $C^{\frac{2}{1-3w}} M^{\frac{3(1+w)}{1-3w}}$ . . . . .	28
3.1.	Esta figura muestra el comportamiento del parámetro $w$ dado en la ecuación (3.11) como una función de la variable adimensional $R/\bar{R}$ . La gráfica inferior (la más oscura) se corresponde con $\alpha = -0,1$ . La superior (la más clara) corresponde a $\alpha = 2$ . Finalmente, la del medio muestra $w$ para el gas de Chaplygin, es decir, $\alpha = 1$ . Como se puede ver, el gas de Chaplygin generalizado tiende a una constante cosmológica positiva ( $w = -1$ ) para valores grandes del factor de escala. . . . .	36

- 3.2. Esta figura muestra el comportamiento del campo escalar  $\phi$  como una función del factor de escala adimensional  $R/\bar{R}$  definido en la ecuación (3.18). La gráfica con línea discontinua corresponde a  $\alpha = -0,1$ , mientras que la gráfica con línea continua más oscura (más clara) corresponde a  $\alpha = 1$  ( $\alpha = 2$ ). En la figura, el campo escalar se ha redefinido como  $\sqrt{6\pi G A_{\text{ch}}^{1/[2(1+\alpha)]}}(\phi - \phi_0)$ . . . . . 39
- 3.3. Estas figuras muestran el comportamiento de  $V(R)$  definido en la ecuación (3.21) como una función del factor de escala. La figura de la izquierda corresponde al valor  $\alpha = -0,1$  (línea continua) y  $\alpha = 1/2$  (línea discontinua). La figura de la derecha corresponde a  $\alpha = 2$ . El potencial  $V(R)$  se ha redefinido como  $A_{\text{ch}}^{-1/(1+\alpha)}V(R)$  y el factor de escala como  $R/\bar{R}$ . . . . . 40
- 3.4. Estas figuras muestran el comportamiento de  $\psi$  definido en las ecuaciones (3.22) y (3.23) como una función del factor de escala para un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con secciones espaciales planas. La figura de la izquierda corresponde a  $\alpha = -0,1$ . La figura de la derecha corresponde a  $\alpha = 0,5$  (línea discontinua) y  $\alpha = 2$  (línea continua). En el dibujo de la izquierda, el campo escalar  $\psi$  se ha redefinido como  $\sqrt{6\pi G A_{\text{ch}}^{1/[2(1+\alpha)]}}(\psi - \psi_0)$ . En la gráfica de la derecha  $\psi$  se ha redefinido como  $\sqrt{6\pi G A_{\text{ch}}^{1/[2(1+\alpha)]}}(\psi - \psi_\infty)$ . En ambas figuras el factor de escala se ha dividido por  $\bar{R}$ . . . . . 41
- 3.5. Estas figuras muestran el comportamiento de  $V$  como una función del campo escalar  $\psi$  [véase las ecuaciones (3.21), (3.22) y (3.23)] para un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con secciones espaciales planas. Las figuras comenzando por la izquierda corresponden a  $\alpha = -0,1$ ,  $\alpha = 0,5$  y  $\alpha = 2$ , respectivamente. El potencial  $V$  ha sido redefinido como  $A_{\text{ch}}^{-1/(1+\alpha)}V$ . En la gráfica de la izquierda se ha redefinido  $\psi$  como  $\sqrt{6\pi G A_{\text{ch}}^{1/[2(1+\alpha)]}}(\psi - \psi_\infty)$ . En las otras figuras, el campo escalar  $\psi$  se ha redefinido como  $\sqrt{6\pi G A_{\text{ch}}^{1/[2(1+\alpha)]}}(\psi - \psi_0)$ . . . . . 43
- 3.6. Estas figuras muestran el comportamiento de  $\tilde{V}(\chi)$  definido en la ecuación (3.27) como una función del campo escalar mínimamente acoplado  $\chi$  para un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con secciones espaciales planas. La figura de la izquierda corresponde a  $\alpha = -0,1$  y la de la derecha a  $\alpha = 2$ . En las gráficas, el campo escalar  $\chi$  se ha redefinido como  $\sqrt{24\pi G}(\chi - \chi_0)$  y el potencial como  $2(2/A_{\text{ch}})^{1/(1+\alpha)}\tilde{V}(\chi)$ . Como se puede ver, el comportamiento de  $\tilde{V}$  depende del valor elegido para  $\alpha$ . Para valores negativos de  $\alpha$ , el campo escalar crece con el potencial. Sin embargo, para valores positivos de  $\alpha$ , el campo escalar  $\chi$  disminuye con el potencial. . . . . 44

- 3.7. Se muestra el comportamiento del cuadrado de la velocidad del campo escalar  $\dot{\chi}^2$  como una función de  $R/\bar{R}$ . La figura de la izquierda corresponde a  $\alpha = -0,1$ , mientras que la de la derecha se refiere a  $\alpha = 2$ .  $\dot{\chi}^2$  se ha redefinido como  $A_{\text{ch}}^{-1/(1+\alpha)} \dot{\chi}^2$ . . . . . 44
- 3.8. Estas figuras muestran el comportamiento de  $\Omega_{\text{DE}}$ ,  $\Omega_{\text{DM}}$  y  $\Omega_{\text{R}}$  como funciones del factor de escala desde la época de la nucleosíntesis; es decir,  $\rho_{\text{R}} = 1\text{MeV}^4$ . La gráfica con línea continua más clara corresponde a  $\Omega_{\text{R}}$ . La que tiene la línea continua más oscura corresponde a  $\Omega_{\text{DM}}$ . Finalmente, la de la línea discontinua corresponde a  $\Omega_{\text{DE}}$ . Por otro lado, en la figura de la izquierda, se han elegido  $\alpha = -0,1$ ,  $A_{\text{ch}}^{1/(1+\alpha)} \simeq 2,8 \times 10^{-11} eV^4$  y  $|B|^{1/(1+\alpha)} \simeq 3,8 \times 10^{-40} eV^4$ . En cambio, en la figura de la derecha, se han tomado  $\alpha = -0,9$ ,  $A_{\text{ch}}^{1/(1+\alpha)} \simeq 2,8 \times 10^{-10} eV^4$  y  $|B|^{1/(1+\alpha)} \simeq 1,4 \times 10^{-41} eV^4$ . Como puede observarse el comportamiento es muy parecido para estas dos elecciones de parámetros. . . . . 46
- 5.1. Evolución del radio de la garganta del agujero de gusano,  $b_0$ , inducida por la acreción de energía fantasma. En el tiempo  $t = \tilde{t}$ , la masa exótica negativa llega a hacerse infinita y entonces cambia de signo, convirtiéndose así el agujero de gusano en un puente de Eintein-Rosen cuya masa asociada disminuye hasta cero en el big rip con  $t = t_*$ . Durante el intervalo temporal  $\Delta t_{\text{nocronal}}$  existirá una disrupción de la evolución causal del universo completo. La evolución del universo fantasma en el tiempo  $t = \tilde{t}$  es completamente no causal y todas las clases de viajes temporales están permitidos. Por lo tanto el momento con  $t = \tilde{t}$  lo llamaremos aquí “Big Trip”. . . . . 59
- 5.2. Representación esquemática de la salida suave del proceso de inflación primordial producido por energía fantasma. Está basada en el viaje temporal de todo un universo suficientemente inflado en un régimen de energía fantasma a un régimen dominado por radiación usual. Tal proceso es en general de naturaleza no cronal y está elegido por argumentos antrópicos sobre todas las otras configuraciones cosmológicas posibles, permitidas por la interpretación de los muchos-mundos de la mecánica cuántica del universo temprano. . . . . 67

5.3. Representación artística del proceso de un viaje temporal en el cual un universo fantasma con  $w < -1$  se convierte en un universo con  $w = 1/3$  en el futuro. Este proceso se lleva a cabo usando la topología representada en la parte superior de esta figura por un agujero de gusano inflado cuyo tamaño ha excedido el radio del universo fantasma insertando una de sus bocas en el universo fantasma mientras que la otra se conecta a un universo anfitrión. En el cuadro de abajo de la figura también podemos ver otras dos posibles topologías que podría adoptar la garganta crecida del agujero de gusano y el universo fantasma. En la izquierda, la topología corresponde a un agujero de gusano que envuelve al universo fantasma, y en la derecha, vemos una topología más complicada donde, además del universo fantasma y el agujero de gusano, hay otros dos universos extra a los que se insertan las dos bocas del agujero de gusano. 68

5.4. La uniformidad se transfiere desde el universo fantasma inflado a nuestro universo cuando el primer universo es absorbido por el siguiente después del viaje temporal. Antes de éste, nuestro universo está desconectado causalmente por completo respecto a los observadores actuales. Como el universo fantasma estaba más caliente que el nuestro, cuando ambos entraron en contacto, toda la energía distribuida de manera uniforme se transfirió a nuestro universo, aniquilando todas las inhomogeneidades. . . . . 69

5.5. Parte superior: Después de un tiempo  $t = \tilde{t}$  el agujero de gusano se convierte inmediatamente en un puente de Einstein-Rosen cuya garganta se estrangula rápidamente, dejando un agujero negro y otro blanco. Estos agujeros desaparecen rápidamente debido a la acreción continuada de energía fantasma. Parte inferior: El mismo régimen en el caso de un agujero de gusano conectando un universo fantasma con otro universo distinto parecido al nuestro. En dicho caso, cada uno de estos universos están encajados al principio en un agujero negro o blanco gigante que se desconectan mutuamente. Entonces, los agujeros desaparecen rápidamente y finalmente los dos universos desconectados son el resultado del proceso completo. . . . . 70

6.1. Esta figura muestra el comportamiento de la masa de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de energía oscura con  $w = -0,8$  y  $w = -0,9$ . Se observa que cuanto mayor sea  $w$  o menor  $J$ , más rápido es el aumento de la masa. . . . . 81

6.2. Esta figura muestra el comportamiento del momento angular específico de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de energía oscura con  $w = -0,8$  y  $w = -0,9$ . Se observa que cuanto mayor sea  $w$  o  $r$ , más rápido es el aumento del momento angular específico. En la gráfica insertada podemos ver que  $a$  tiende a un valor constante a tiempos grandes para todos los casos estudiados. . . . . 82

6.3. Esta figura muestra el comportamiento del momento angular de un agujero negro de Kerr-Newman con el tiempo cósmico en presencia de energía oscura con  $w = -0,8$  y  $w = -0,9$ . Se observa que cuanto mayor sea  $w$ ,  $r$  o  $M$ , más rápido es el aumento del momento angular. En la gráfica insertada podemos ver que  $J$  tiende a un valor constante para tiempos grandes en todos los casos estudiados. . . . . 83

6.4. Esta figura muestra el comportamiento de la masa de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de energía fantasma con  $w = -1,1$  y  $w = -1,2$ . Se observa que cuanto mayor sea  $|w < -1|$  o menor  $J$ , más rápida es la disminución de la masa. 85

6.5. Esta figura muestra el comportamiento del momento angular específico de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de energía fantasma con  $w = -1,1$  y  $w = -1,2$ . Se observa que cuanto mayor sean  $|w < -1|$  o  $r$ , más rápido es la disminución del momento angular específico. . . . . 86

6.6. Esta figura muestra el comportamiento del momento angular de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de energía fantasma con  $w = -1,1$  y  $w = -1,2$ . Se observa que cuanto mayor sean  $|w < -1|$ ,  $r$  o  $M$ , más rápido es la disminución del momento angular. . . . . 87

6.7. Esta figura muestra el comportamiento de la masa de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de un gas de Chaplygin generalizado con  $B = 0,5$  y  $\alpha = 0,5$ . . . . . 89

6.8. Esta figura muestra el comportamiento de la masa y del momento angular específico de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de un gas de Chaplygin generalizado (fantasma) con  $B = -0,5$  y  $\alpha = 0,5$ . . . . . 90

6.9. Evolución de un agujero negro de Kerr-Newman con energía oscura. Esta figura muestra el comportamiento de la masa y el momento angular específico de un agujero de Kerr-Newman extremo como una función del tiempo cósmico en presencia de energía oscura con  $w = -0,9$ . Es posible comprobar que la conjetura de la censura cósmica se viola. . . . 92

- 6.10. Evolución de un agujero de Kerr-Newman con energía oscura. Esta figura muestra el comportamiento de la masa y el momento angular específico de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de energía oscura con  $w = -0,8$ . La separación entre las dos curvas disminuye según se aumenta el valor inicial de  $a$ . También se puede comprobar que existe un intervalo pequeño inicial de tiempo (en este caso hasta aproximadamente  $t = 0,05s$ ) donde todavía se satisface la conjetura. . . . . 93
- 6.11. Evolución de un agujero negro extremo de Kerr-Newman con energía fantasma. Esta figura muestra el comportamiento de la masa y el momento angular específico de un agujero negro extremo de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de energía fantasma con  $w = -1,1$ . La separación entre las dos curvas aumenta según se considere el valor inicial de  $a$  más pequeño, o bien se haga  $r$  más grande. 95



# Índice de tablas

2.1. Soluciones particulares a la ecuación de Friedmann con un campo de quintaesencia. . . . .	19
7.1. Clasificación de los defectos topológicos atendiendo a los grupos de homotopía $\pi_n(M)$ . . . . .	101



# Capítulo 1

## Introducción

Hasta hace unos 10 años, se habían propuesto varios modelos para estudiar la evolución del Universo, siendo el Modelo Cosmológico Estándar el que ha tenido más éxito, dado que a partir del periodo post-inflacionario era el que había conseguido explicar mejor los datos observacionales existentes hasta entonces. El Modelo Cosmológico Estándar se basa en dos hipótesis o postulados y en la Teoría de la Relatividad General formulada por Einstein en 1915. La Ecuación de Einstein establece una relación entre la geometría del Universo y el contenido material que alberga.

Las dos hipótesis que fundamentan el Modelo Cosmológico Estándar son la homogeneidad y la isotropía. La homogeneidad consiste en suponer que no existe ningún observador en el Universo que ocupe una posición privilegiada, que si la Tierra estuviera situada en una región diferente, el Universo nos parecería el mismo. Análogamente, es natural suponer que el Universo es isótropo; es decir, que no hay direcciones privilegiadas en el mismo, lo que implica que las observaciones a escalas suficientemente grandes deberían dar resultados independientes de la dirección en la que observamos. Estas hipótesis parecen ser confirmadas empíricamente. En efecto, las observaciones sobre la distribución de galaxias muestran que a gran escala parece ser homogénea e isótropa. Pero la evidencia observacional más importante en favor de la homogeneidad e isotropía del Universo fue el descubrimiento de una radiación térmica a unos 3K de naturaleza cósmica denominada el fondo cósmico de microondas. Esta radiación de fondo ha sido estudiada minuciosamente llegándose a ver que es isótropa con una gran precisión.

Cuando se supone que el Universo es homogéneo e isótropo las ecuaciones de Einstein tienen tres posibles soluciones, correspondientes a las tres posibles geometrías: esférica, plana e hiperbólica. La primera característica que se deduce de estas soluciones es que el Universo comenzó en un estado singular en el que la distancia entre todos los puntos del espacio era nula, mientras que la densidad de materia y la curvatura del espacio eran infinitas. Este estado singular del Uni-

verso es llamado “Big Bang”, aunque conviene observar que dicho Big Bang no representa en realidad una explosión de materia concentrada en un punto como su nombre podría sugerir, ya que la estructura espacio-temporal es singular en el Big Bang y no tiene sentido preguntarse sobre las características físicas del Universo en ese momento.

Ahora pasemos a considerar las predicciones del Modelo Estándar para el futuro del Universo. En los casos de geometría plana e hiperbólica se tiene que si el Universo en este momento se está expandiendo como indican las observaciones, entonces deberá seguir expandiéndose para siempre. A estos dos tipos de universo se les suele llamar modelos abiertos. Sin embargo, en el caso esférico, usualmente llamado modelo cósmico cerrado, el Universo no puede estar expandiéndose para siempre, por lo que a un tiempo finito después de su origen, el Universo alcanzaría un tamaño máximo y entonces comenzaría a contraerse, llegando en un tiempo finito a un final al que se denomina “Big Crunch”. Básicamente, esto es lo que predice el Modelo Cosmológico Estándar: el Universo comenzó en el Big Bang con una gran expansión, y dependiendo de su geometría (o distribución de materia que contenga, ya que la ecuación de Einstein las relaciona) seguirá expandiéndose para siempre o no. Parece razonable que esto sea así, ya que si el Universo empezó expandiéndose, teniendo en cuenta que la única fuerza que domina a nivel cósmico es la gravitatoria, que es atractiva, dicha expansión inexorablemente se iría frenando de tal forma que, dependiendo de la cantidad de materia que contuviera, el Universo seguiría expandiéndose para siempre (cada vez más despacio, pero expandiéndose para siempre), o bien, si la cantidad total de materia es suficientemente grande, llegase a un tamaño máximo a partir del cual comenzaría a contraerse, hasta recolapsar en un punto (Big Crunch).

Sin embargo, varias observaciones astronómicas y cosmológicas recientes muestran sin embargo, que el Universo está entrando en realidad en una fase de expansión acelerada, como veremos en la sección siguiente.

## **1.1. Antecedentes**

### **1.1.1. La expansión acelerada del Universo**

Varias observaciones astronómicas y cosmológicas, provenientes tanto de las medidas de las anisotropías del fondo de microondas [19, 144, 151] como de observaciones en supernovas distantes de tipo Ia [137, 140, 152] muestran que el Universo se encuentra en una fase de expansión acelerada. Es decir, que la expansión no sólo no es cada vez más lenta, como cabría esperar si la única fuerza dominante a gran escala fuera la gravitatoria, sino que se expande cada vez más rápidamente, como si hubiera en el Universo una “fuerza antigravitatoria” que se

opusiera a la gravedad y llegara a dominarla a partir de un cierto momento. De hecho, estas observaciones sugieren que la aceleración del Universo se debe a algún tipo de sustancia desconocida denominada usualmente **energía oscura**, la cual constituye aproximadamente las dos terceras partes de la densidad de energía total del Universo actual. Las medidas de las anisotropías del fondo cósmico de microondas parecen indicar, por otra parte, que el Universo es muy aproximadamente plano [48]. Esta característica unida al hecho de que la expansión es acelerada, ha dado finalmente lugar a lo que se conoce como **Nueva Cosmología Estándar** [153].

### 1.1.2. Energía oscura: Modelos

Es conocido que la energía oscura satisface una ecuación de estado  $P = w\rho$ , donde  $-1,2 < w < -0,9$  a  $3\sigma$  de grado de confianza (al menos en la historia reciente del Universo) [98, 145]. Se han propuesto varios modelos fenomenológicos para describir la energía oscura, siendo la constante cosmológica,  $\Lambda$ , el candidato más simple y popular [133, 135, 163]. Sin embargo, esta posibilidad tendría que descartarse, en principio, debido a la inmensa discrepancia existente entre los valores teóricos y los experimentales permitidos para  $\Lambda$ . Una constante cosmológica positiva podría describir la aceleración del Universo, ya que dicha constante equivale a un fluido perfecto con presión negativa,  $-\Lambda$ , lo que constituye uno de los ingredientes principales para producir un universo con expansión acelerada. De hecho, un universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker entrará en una fase de expansión acelerada siempre que  $3P + \rho < 0$ , donde  $\rho$  y  $P$  corresponden a la densidad de energía total y a la presión del contenido material, respectivamente. Un contenido material que cumpla este requisito puede ser descrito de manera efectiva, por ejemplo, por (1) un fluido perfecto con una ecuación barotrópica de estado, o (2) una más exótica del tipo usado en los modelos de gas de Chaplygin generalizado [5, 17, 18, 20–27, 29, 41, 44, 51, 52, 57, 58, 78, 79, 104, 123, 142], o (3) por campos escalares dinámicos como en los modelos de quintaesencia [35, 60, 67, 139, 164] y modelos de energía fantasma [2, 4, 32–34, 37, 39, 42, 43, 46, 59, 62, 70, 85–88, 102, 103, 113, 116, 119, 120, 125–127, 129, 143, 148, 149].

Si la energía oscura estuviera descrita por cualquiera de los modelos anteriores entonces el futuro del Universo podría ser bastante diferente. Mientras que para un modelo cosmológico dominado por un campo escalar de quintaesencia, con una ecuación de estado constante efectiva  $P = w\rho$ , con  $w > -1$ , el Universo se expandiría por siempre, si lo que domina es la energía fantasma, es decir, para  $w < -1$ , el futuro del Universo podría ser muy diferente. De hecho, para una ecuación de estado formalmente similar a la anterior, pero con  $w < -1$ , el Universo experimentaría un final cósmico a tiempo finito, también llamado big rip, [2, 4, 32–34, 37, 39, 42, 43, 46, 59, 62, 70, 85–88, 102, 103, 113, 116, 119, 120,

125–127, 129, 143, 148, 149]; es decir, el factor de escala tendería a infinito en un tiempo cósmico finito. La afirmación anterior está basada en un valor constante  $w < -1$ . Sin embargo, el valor de  $w$  puede cambiar a lo largo de la evolución del Universo y por lo tanto, en principio, el Universo podría también no alcanzar un big rip en el futuro.

Otro candidato para describir la energía oscura es un gas de Chaplygin generalizado [20–24, 26, 27, 78, 79, 104]. Éste corresponde a un fluido perfecto con una ecuación de estado bastante exótica,  $P = -A_{\text{ch}}/\rho^\alpha$ , donde  $A_{\text{ch}}$  es una constante positiva y  $\alpha$  un parámetro. Este fluido puede describir una transición desde un universo dominado por polvo a tiempos tempranos a un universo tipo de Sitter a tiempos tardíos. De esta forma, este contenido material ha sido propuesto como un modelo unificado capaz de describir la materia oscura y la energía oscura simultáneamente [20, 24, 27, 68].

Otros modelos interesantes avanzados hasta ahora para describir la energía oscura son el de K-esencia [6–8, 40, 61] y el modelo taquiónico de Padmanabhan y colaboradores [11]. El primero de ellos se basa en la consideración de un campo escalar,  $\phi$ , equipado con un término cinético no canónico descrito por lagrangianas generales de la forma  $\mathcal{L} = K(\phi)q(x)$ , con  $x = \frac{1}{2}\Delta_\mu\phi\Delta_\nu\phi$  [6–8, 40, 61]. Esta definición, la cual incluye al modelo de quintaesencia como caso límite describe en general modelos que pueden resolver, o al menos, hacer menos agudo el problema de la coincidencia cósmica.

El modelo taquiónico es también muy interesante. En este caso se trata de construir un modelo para la energía oscura partiendo de principios relativistas fundamentales y simples. En efecto, se ha comprobado [11] que la teoría cosmológica que resulta de promocionar a la categoría de variables de una teoría de campo escalar los parámetros  $m_0$  y  $\dot{q}^2$ , que definen la lagrangiana relativista, de acuerdo con  $m_0 \rightarrow V(\phi)$  y  $\dot{q}^2 \rightarrow \dot{\phi}^2$ , modela también un universo en expansión acelerada con excelentes propiedades.

### 1.1.3. Gravedad Modificada

También tenemos que mencionar aquí que existen otros candidatos para la energía oscura basados en modelos de mundos de membranas [49, 50, 141] y, sobre todo, acciones cuatro-dimensionales de Einstein-Hilbert modificadas [38, 131], donde se puede alcanzar también una aceleración del Universo a tiempos tardíos. En los modelos en los que se modifica la acción de Hilbert-Einstein no se introduce ningún fluido para producir la aceleración, sino que se considera más natural que la teoría de Einstein sea una aproximación a otra teoría más general. Por ello se piensa que hay que añadir nuevos términos a la acción que serían los que empezarían a dominar ahora para obtener la aceleración cósmica. Se suele utilizar una acción de la forma

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) \quad (1.1)$$

donde  $f(\mathcal{R})$  es una función de la curvatura. Hasta ahora las formas más usadas para esta función han sido del tipo  $\mathcal{R} + \beta\mathcal{R}^2$ ,  $\mathcal{R} + \frac{\beta}{\mathcal{R}}$ ,  $\mathcal{R} + \ln(\mathcal{R})$ , ...

Cada uno de estos modelos poseen virtudes, pero también presentan inconvenientes como veremos en la sección 1.2.

#### 1.1.4. Interacción de la energía oscura con objetos astronómicos

Dado que la energía oscura constituye aproximadamente el setenta por ciento del contenido material del Universo y es por ello la componente mayoritaria, sería muy interesante estudiar cómo interacciona este tipo de sustancia con diferentes objetos astronómicos que generan un campo gravitatorio diferente de cero, tales como cuerdas cósmicas, agujeros de gusano y agujeros negros. Cabe esperar que la energía oscura produzca efectos de acreción considerables en dichos objetos. En efecto, se ha podido ver ya [9] que los agujeros negros sufren un proceso de degradación importante que se contrapone con la conocida evaporación inducida por efectos cuánticos [64, 74, 90]. También se han estimado efectos importantes en los agujeros de gusano [71]. Uno de los principales objetivos de esta memoria es precisamente evaluar los efectos de acreción de la energía oscura, tanto para el caso  $w > -1$  como  $w < -1$ , en distintas situaciones de interés astronómico y cósmico.

#### 1.1.5. Evolución del Universo: inflación, superaceleración y futuro

En esta sección resumiremos brevemente la evolución de nuestro Universo desde el Big Bang hasta el presente y consideraremos brevemente los posibles futuros que podrían esperarle. Vamos a describir muy brevemente el modelo estándar, que asume que el Universo se modela bien a través de una solución del tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker en la que se hacen ciertas hipótesis sobre el contenido material del Universo. Este modelo ha recibido un apoyo muy considerable a partir de las medidas de la existencia del fondo cósmico de microondas y por la explicación dada a la abundancia cósmica de helio. A pesar de ello, se debe tener en cuenta que ninguna de sus hipótesis es aún definitiva.

Un buen estudio de la naturaleza del Universo temprano se puede entender considerando que una disminución del factor de escala  $R$  según nos desplazamos hacia atrás en el tiempo tiene el mismo efecto local en la materia que si ésta

estuviera introducida en una caja cuyas paredes se contrajeran a la misma velocidad. Así, y tal como ocurriría en una caja contrayéndose, la contribución de la radiación comparada con la materia ordinaria (es decir, bariónica) aumenta en el pasado. La densidad de energía del fondo cósmico de microondas en el Universo actual se estima que es de unas 1000 veces menor que la contribución de densidad de masa de la materia, aunque este número está indeterminado en un factor 10 por las dificultades involucradas en la determinación de la densidad actual de la materia ordinaria. Así, suponiendo que esta radiación continua existiendo según uno regresa al pasado, y teniendo en cuenta que la radiación en cuestión no corresponde a la emitida por las galaxias, se sigue que cuando el factor de escala  $R$  era más de 1000 veces menor que el valor actual, la radiación de fondo debería haber sido la contribución dominante a la densidad de energía del Universo. De este modo, se podría esperar que un modelo de universo lleno de radiación fuera una buena aproximación para la dinámica del Universo antes de esta fase, mientras que un modelo lleno de polvo sería una buena aproximación para describir la fase posterior.

Dado que la temperatura de una caja de gas aumenta según se comprime, se esperaría que la materia y radiación en el Universo se calentaran según  $R$  disminuye, y llegue a ser infinitamente caliente cuando uno se aproxima al Big Bang,  $R \rightarrow 0$ .

Existen dos efectos muy importantes e interesantes que pudieron haber ocurrido en el Universo primordial sólo varios órdenes de magnitud después del tiempo de Planck. El primero hace referencia a la dinámica del Universo muy temprano. En el universo primordial debería de haber habido una fase donde la dinámica fuera la misma que la que corresponde a un universo vacío con una constante cosmológica positiva y grande. Este es el régimen llamado inflacionario en el que el Universo temprano se comporta aproximadamente como un universo tipo de Sitter, expandiéndose muy rápidamente. Para hacernos una idea de cómo fue esta fase de expansión superacelerada, se estima (según modelos realistas de teoría inflacionaria [83, 110, 146, 147]) que esta fase podría ser tan sólo del orden de  $10^{-35}$  segundos, y el Universo pasaría de un tamaño tan pequeño como la escala de Planck ( $\sim 10^{-33}$  cm) a un tamaño inmenso del orden de  $10^{10^{12}}$  cm (aunque este tamaño final es muy dependiente del modelo de inflación usado). Obsérvese que este crecimiento tan grande explicaría el motivo por el cual el Universo parece tan plano y uniforme. En realidad, fue esta circunstancia y la resolución del llamado problema del horizonte [54] lo que motivó la introducción del modelo inflacionario [3, 83, 111, 146, 147].

El segundo efecto se refiere al contenido bariónico en el Universo, lo que implica una violación de la simetría materia-antimateria. Es posible que nuestro Universo naciera ya con un exceso de bariones respecto a los antibariones, si el



número de bariones se conservara estrictamente. Sin embargo, también es posible que el Universo comenzara con un estado de simetría materia-antimateria y que el exceso de bariones se creara en el universo primordial por un proceso de rotura de dicha simetría. Para que esto ocurriera, era necesario que las interacciones de partículas de alta energía que ocurrirían en el Universo primordial satisficieran las siguientes propiedades: (1) violar netamente la conservación del número de bariones; (2) deberían fallar tanto la conservación de la conjugación de la carga  $C$  como la composición de la conjugación de carga con la paridad,  $CP$  (ya que si cualquiera de ellas se preservara se producirían la misma cantidad de bariones como de antibariones); y (3), deben resultar de una desviación del equilibrio térmico, (esto es porque en equilibrio térmico se producirían la misma cantidad de partículas como de antipartículas, ya que tanto las partículas como las antipartículas tienen la misma masa). La existencia de una partícula masiva cuyo tiempo de decaimiento fuera mayor que el tiempo de expansión podría producir de manera natural fenómenos fuera de equilibrio cuando la temperatura disminuyera por debajo de la masa de la partícula (así se detendría esencialmente la producción de la partícula). La “gran unificación” de las interacciones fuerte, electromagnética y débil predicen estas tres propiedades y, de este modo, proporciona una explicación de la asimetría de materia-antimateria de nuestro Universo.

Continuemos ahora con la historia de la evolución del Universo. El Universo primordial a  $t \sim 1$  segundo, tenía una densidad de  $\rho \sim 5 \times 10^5 \text{ g cm}^{-3}$ , y una temperatura  $T \sim 10^{10} \text{ K}$ . En este momento la materia del Universo consistía fundamentalmente en neutrinos, fotones, electrones, positrones, neutrones, y protones, en equilibrio térmico; la temperatura era ya suficientemente baja para hacer que la abundancia en el equilibrio de otras partículas elementales más masivas fuera despreciable. En esta fase, las interacciones de los neutrinos llegaron a ser suficientemente débiles y se desacoplaron del resto de la materia. Para el resto de la historia del Universo, los neutrinos simplemente serían desplazados hacia el rojo a energías más bajas. Puesto que el espectro térmico desplazado hacia el rojo ( $\omega \rightarrow \omega/R$ ) corresponde a una temperatura menor ( $T \rightarrow T/R$ ), el Universo actual debería contener una distribución de cuerpo negro de neutrinos a una temperatura de aproximadamente  $T \sim 2 \text{ K}$ , que sería muy difícil de detectar con los medios actuales.

A medida que el Universo continuó enfriándose, el balance de las reacciones que convierten protones en neutrones y viceversa decayeron mucho más rápidamente que la tasa de expansión del Universo. Consecuentemente, la relación entre las abundancias de neutrones y protones debió congelarse en torno a  $t \sim 1,5$  segundos a un valor de alrededor de  $1/6$  (los protones son más abundantes que los neutrones al ser aproximadamente  $1/2 \text{ MeV}$  más ligeros, por ello alcanzaron el equilibrio térmico antes en este proceso de enfriamiento). Este enfriamiento no fue instantáneo sino que la relación de abundancias iría disminuyendo progresiva-

mente con el tiempo debido al decaimiento de los neutrones.

En  $t \sim 4$  segundos, la densidad era  $\rho \sim 3 \times 10^4 \text{ g cm}^{-3}$ , y la temperatura  $T \sim 5 \times 10^9 \text{ K} \sim 0,5 \text{ MeV}$ , que es aproximadamente la masa de los electrones y los positrones. En esta fase la población en equilibrio de electrones y positrones disminuye rápidamente; la tasa de producción cae por debajo de la de aniquilación, y poco después de este momento todos los positrones serían aniquilados, dejando una población relativamente pequeña de electrones residuales. Esencialmente toda la energía de los pares electrón-positrón se transfiere a los fotones, elevando así su temperatura aproximadamente unas 1,4 veces más que la temperatura de los neutrinos.

Cuando la temperatura bajó aproximadamente a  $10^9 \text{ K}$  en un tiempo  $t \sim 3$  minutos, comenzó abruptamente la nucleosíntesis, produciendo núcleos de  $^4\text{He}$ . Casi no habría nucleosíntesis de elementos más pesados que el helio debido a las grandes barreras de potencial de Coulomb y a la ausencia de núcleos estables con pesos atómicos 5 y 8. Dentro de un intervalo de tiempo de unos pocos minutos, esencialmente todos los neutrones presentes que no decayeron son convertidos en  $^4\text{He}$ , resultando una abundancia de un 25 por ciento en masa de helio, con abundancia mucho menor de  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ , y  $^7\text{Li}$ . También se producen otros elementos, pero en cantidades despreciables. Este porcentaje de helio no es muy sensible a los valores supuestos de densidad de bariones. Una densidad relativamente baja de bariones podría producir una abundancia de  $^2\text{H}$  sobre  $5 \times 10^{-4}$  en masa, mientras que una densidad alta — específicamente, una densidad suficientemente alta para “cerrar el universo”— aumentaría la eficiencia de las cadenas de producción de helio dando lugar a una abundancia de  $^2\text{H}$  muchos órdenes de magnitud menor.

Es difícil observar la abundancia cósmica de helio, pero una abundancia de un 25% parece estar de acuerdo con las observaciones. La presencia de esta cantidad de helio en el Universo no puede ser producida por otros procesos— en particular, se estima que en la nucleosíntesis de las estrellas sólo puede producirse un porcentaje pequeño de helio — y así la predicción de la producción de helio vía la “nucleosíntesis del big bang” se puede ver como un gran éxito de la teoría.

Después del periodo de nucleosíntesis, el Universo continuó su expansión y enfriamiento. El siguiente hecho cósmico de mayor importancia tuvo lugar cuando la temperatura descendió a los 4000 K. Esto ocurrió en aproximadamente un tiempo de  $t \sim 4 \times 10^5$  años, en el que los electrones y protones libres se combinaron para formar átomos de hidrógeno neutro. De hecho, en el tiempo en que la temperatura bajó a 2000 K, la fracción de hidrógeno ionizado era solamente de  $\sim 10^{-4}$ . Como resultado de este hecho — llamado *recombinación*, aunque, por supuesto, los electrones y los protones no se habían combinado nunca antes— la interacción entre la materia y la radiación cayó precipitadamente, ya que las secciones eficaces de choques con partículas libres cargadas es mucho mayor que con H y He neutro. De hecho, los fotones se desacoplaron completamente de la mate-

ria del Universo durante el resto de su evolución. Así, el Universo actual debería de estar lleno de esta radiación de cuerpo negro de baja temperatura originaria del big bang, cuyos fotones interactuaron por última vez con la materia en el tiempo de recombinación.

La temperatura de tal radiación de fondo es  $T \sim 2,7$  K (correspondiente a longitudes de onda principalmente en el régimen de las microondas) que fue descubierta por Penzias y Wilson (1965). Sería difícil que esta radiación se produjera por otro medio, y de este modo su existencia nos proporciona la principal confirmación del escenario anterior de la evolución de nuestro Universo. Además, la radiación ha sido medida y es isótropa con un alto grado de precisión. Esto proporciona una evidencia muy fuerte de que el Universo era prácticamente homogéneo e isótropo, al menos en el tiempo de recombinación.

El desacoplo de la materia y la radiación en esta era tuvo un efecto mayor sobre el crecimiento de perturbaciones gravitacionales, permitiendo la formación de galaxias. Justo antes de la recombinación, la presión proporcionada por la radiación inhibió el crecimiento de perturbaciones gravitacionales que involucraran masas menores de aproximadamente  $10^{17}$  masas solares, que es mucho mayor que la masa de las galaxias típicas (sobre  $10^{11}$  masas solares). Sin embargo, después de la recombinación, la presión de la radiación no tuvo efectos sobre la materia y las inestabilidades gravitacionales pudieron ocurrir para masas mayores de  $10^5$  masas solares. Así, las irregularidades en la distribución de la materia comenzaron a crecer después de la recombinación, dando lugar a la formación de galaxias, agrupaciones de estrellas y estrellas. No obstante, todavía no se entiende bien este proceso de formación de estructuras.

En algún momento entre  $t \sim 10^3$  años y  $t \sim 10^7$  años, la materia ordinaria llegó a ser la forma de energía dominante en el Universo. (El tiempo exacto en el que esto ocurrió es incierto debido a la indeterminación sustancial en la densidad de materia del Universo actual). La dinámica del Universo se fue transformando desde un “lleno de radiación” a una solución “llena de polvo”. Finalmente, en  $t \sim 13 - 14$  mil millones de años el Universo alcanzó su estado actual.

En lo que se refiere a su la evolución futura ya hemos comentado que el Modelo Cosmológico Estándar predice que o bien el Universo va a seguir expandiéndose para siempre o que llegará un momento en el que el Universo empezará a contraerse. En cualquier caso, en dicho modelo, la expansión iría frenándose debido a la atracción de la fuerza gravitatoria. Ahora bien, debido a la presencia de energía oscura, éste se encuentra actualmente en una fase de expansión acelerada. Como ya hemos comentado, existen varios modelos para describir esta energía oscura y, por lo tanto, el futuro del Universo tiene una predicción muy distinta según el modelo que consideremos. A lo largo de este trabajo estudiaremos varios de estos modelos teóricos y comentaremos algunas de sus predicciones cara al futuro. Entre éstas, cabe destacar:

- El Universo permanecería expandiéndose para siempre, con un destino final denominado “muerte térmica” [47, 130], donde los agujeros negros estarían acretaando materia visible y materia oscura hasta que, debido a la propia expansión del Universo, los agujeros se encontraran muy lejos unos de otros sin tener más materia que acretar. Llegaría así un momento en el que el proceso de evaporación de Hawking prevaleciera sobre el de acreción, produciéndose una disminución que llegara a hacerlos desaparecer con el tiempo, quedando un Universo lleno de radiación a temperatura muy baja.
- El Universo acabará siendo asintóticamente un universo tipo de Sitter.
- El destino final del Universo podría ser acabar en una singularidad futura denominada big rip, donde el factor de escala diverge a un tiempo finito. En este caso, el Universo crece desde un tamaño inicial a un tamaño infinito en un tiempo cósmico finito. En el big rip un observador que se encontrara en la Tierra vería cómo se irían “desgarrando” progresivamente las galaxias, estrellas, nuestro sistema solar y finalmente los átomos y núcleos atómicos. En ese momento cualquier componente del Universo sería llevada fuera del horizonte de sucesos de cualquier otra componente. Pero la evolución del Universo no es sólo sorprendente en el big rip mismo, sino que incluso es más sorprendente después de la singularidad del big rip, si por algún mecanismo llegara a entrar en esta región, ya que en dicha zona el Universo se contraería desde un tamaño infinito hasta desaparecer en un tiempo infinito.
- Otro destino muy diferente podría ser el denominado big trip, en el cual el Universo podría ser tragado por un agujero de gusano, debido a que el crecimiento del radio del agujero de gusano podría exceder el del radio del Universo, abriendo la posibilidad de que el Universo entero se convirtiera en un “viajero temporal”.
- Por último, comentemos otra predicción no menos sorprendente y curiosa. En este caso, los agujeros negros contenidos en el Universo, podrían llegar a acretar energía oscura tan rápidamente que llegarían a engullir al mismo Universo.

Todas estas predicciones se estudiarán con más detalle en los capítulos siguientes, donde se enunciarán las condiciones que deben darse en el Universo para que pueda ocurrir alguna de las predicciones anteriores. Estas condiciones dependerán sobre todo del parámetro  $w$  que caracteriza a la energía oscura y del modelo concreto que se considere. También dependerán de la geometría del Universo, pero dado que la influencia de ésta es muy pequeña, consideraremos un modelo plano para la mayoría de los casos.

En resumen, se supone que el Universo comenzó en el Big Bang con un tamaño infinitamente pequeño, en el que las leyes de la Física dejan de ser válidas. En ese momento, el Universo entró en una fase de expansión acelerada muy violenta denominada inflación, tras lo cual vino una época de expansión desacelerada dominada principalmente por materia “usual”. Pero recientemente, el Universo ha entrado de nuevo en una época de expansión acelerada, donde el contenido energético del Universo está dominado por la denominada energía oscura. Esta última fase parece similar a la inicial y se pueden encontrar ciertas analogías entre los dos periodos de expansión acelerada, la inflacionaria primordial y la dominada por energía oscura, lo que sugiere que quizás los dos periodos de expansión puedan venir explicados o producidos por mecanismos similares.

Para concluir, resumimos toda la evolución del Universo en la Figura 1.1.

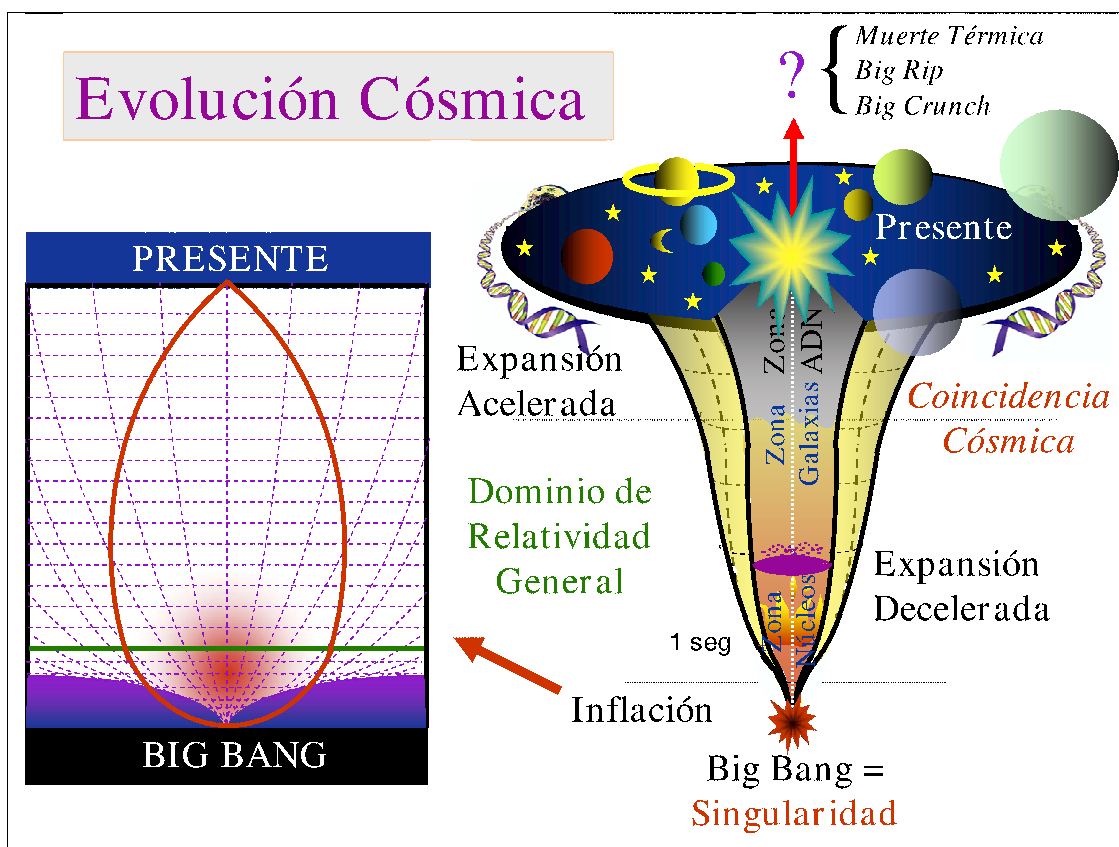


Figura 1.1: Evolución de nuestro Universo desde el Big Bang hasta el presente.

## 1.2. Planteamiento del problema

Ya se ha comentado anteriormente que se han propuesto varios modelos para el estudio de la energía oscura, y que cada modelo tiene problemas sin resolver. Ahora vamos a indicar de forma sintética qué inconvenientes tiene cada uno de los modelos:

- **Quintaesencia (energía oscura):** El principal inconveniente de este modelo es la introducción “ac hoc” de un fluido o campo escalar o axiónico, sin mucha justificación, parece un modelo demasiado artificial. Este tipo de procedimientos es bastante común, sin embargo, en física teórica.
- **Energía fantasma:** Aunque los tratamientos son generalmente clásicos, este tipo de sustancia viola la condición de energía dominante. Además, el término cinético en la acción es negativo, lo que da lugar a inestabilidades en la teoría. También pueden aparecer singularidades como la del big rip o el big trip.
- **Gas de Chaplygin generalizado:** Este modelo presenta inestabilidades, que podrían evitarse si uno incluyera bariones en el análisis, pero dado que a tiempos tardíos la componente que domina es la de la energía oscura, resulta que los bariones no son suficientes para resolver las inestabilidades.
- **La constante cosmológica:** Aunque aparece de forma natural en las ecuaciones de campo de Einstein, tiene el problema de que al ser una constante da poca libertad al modelo. No obstante, el inconveniente más grande es el conocido como “el problema de la constante cosmológica” que dimana de la gran discrepancia que existe entre los valores teóricos calculados y los provenientes de las observaciones.
- **Gravedad modificada:** Aunque es una generalización más o menos natural de la teoría de Einstein, y consigue proporcionar fases de expansión acelerada, podría tener el inconveniente de presentar inestabilidades y, tal vez, de no estar de acuerdo con las observaciones en el Sistema Solar.

Como se puede observar, todos los modelos que se han propuesto consiguen resolver algunas cuestiones, pero plantean muchas otras que todavía no se han conseguido solventar.

## 1.3. Objetivos de este trabajo

El objetivo principal es contribuir a plantear de forma adecuada y, en su caso, resolver alguno de los problemas anteriores generalizando los modelos usados y

estudiando la interacción de la energía oscura con objetos de interés astronómico y cosmológico como agujeros negros y de gusano, así como, cuerdas cósmicas.

## 1.4. Metodología

La metodología que se ha seguido en la realización de este trabajo la podemos resumir en los puntos siguientes

- Se ha usado la teoría de la Relatividad General, es decir la acción de Hilbert-Einstein sin términos adicionales.
- Para modelar la energía oscura se ha introducido un campo escalar con acoplamiento mínimo o conforme, y/o se ha utilizado la ecuación de un fluido perfecto con cierta ecuación de estado, dependiendo del modelo considerado para el estudio de la energía oscura.
- Se ha generalizado el método de acreción de energía oscura usando las leyes de conservación del tensor energía-impulso y su proyección sobre la 4-velocidad para el estudio de la acreción de este tipo de energía sobre objetos astronómicos y cosmológicos, como son los agujeros negros de tipo Kerr-Newman (es decir, dotados de carga y momento angular), cuerdas cósmicas rectas y agujeros de gusano.
- Se han utilizado varios métodos de cálculo numérico que incluyen el uso de programas tales como Mathematica, Maxima y Reduce (los dos últimos para cálculo simbólico) para ayudar en el cálculo y simplificación de los símbolos de Christoffel, curvatura escalar y ecuaciones de Einstein. Para el cálculo numérico y la representación gráfica de los resultados se ha optado por la programación de código en lenguaje C y representación posterior de los resultados con los programas GNUPlot y Mathematica.
- Hemos estudiado modelos de energía oscura en los que se introduce un campo escalar sin modificar la gravedad, analizando si las singularidades del big rip y del big crunch consiguen sobrevivir en algunos de estos modelos o si aparecen nuevas singularidades o comportamientos diferentes a los estudiados hasta la fecha.





## Capítulo 2

# Quintaesencia en espacio-tiempos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

En este capítulo estudiaremos soluciones para la ecuación de Friedmann donde la energía oscura está modelada como un campo de quintaesencia, una constante cosmológica o por energía fantasma (la cual viola la condición de energía dominante). En la sección 2.3, se revisa el modelo de energía fantasma con una ecuación de estado constante en un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker ( $w$  se considera constante y menor que  $-1$ ), obteniendo la expresión explícita del factor de escala para las tres geometrías espaciales. También, se discute si la presencia de una constante cosmológica positiva podría resolver el problema del big rip.

Finalmente, también añadiremos a la ecuación de Friedmann un campo escalar conformemente acoplado a la Gravedad, y resolveremos las ecuaciones para el caso de geometría plana.

### 2.1. Introducción

Como ya se ha comentado en el primer capítulo, nos vamos a centrar en el estudio del Modelo Cosmológico Estándar, que está basado en la Relatividad General y en los espacios de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (introducidos en los años 20 del siglo pasado). Nos interesamos en el Modelo Cosmológico Estándar porque se ajusta bastante bien a las observaciones existentes. Por ello vamos a enunciar el entorno en el que nos vamos a situar en este trabajo.

Consideraremos que el espacio-tiempo es una variedad  $\mathcal{M}$  de dimensión cuatro, dotada de una métrica Lorentziana  $g_{\mu\nu}$ , que satisface las ecuaciones de campo

de Einstein

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein,  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $\mathcal{R}$  es la curvatura escalar, y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor energía impulso.

En esta ecuación, la parte de la izquierda hace referencia a la geometría del espacio y la parte de la derecha al contenido energético-material presente en el universo.

Supondremos que el espacio-tiempo a gran escala es *homogéneo e isótropo*. La métrica más general que satisface la homogeneidad y la isotropía es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [161]:

$$ds^2 = -dt^2 + R(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.2)$$

donde  $K = +1, -1, \text{ ó } 0$  para un universo cerrado, abierto o plano respectivamente, y  $R(t)$  es el “radio” del universo, o más precisamente, su factor de escala (el tamaño total del universo podría ser infinito). Los espacio-tiempos espacialmente abiertos o cerrados tienen diferentes geometrías. Las geodésicas luminosas de esos espacio-tiempos se comportan de manera diferente, y por ello en principio, podrían discriminarse con observaciones.

Los espacio-tiempos que verifican la homogeneidad y la isotropía se denominan espacios de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Las hipótesis que acabamos de enunciar conforman la base del Modelo Cosmológico Estándar.

El Modelo Cosmológico Estándar tiene varias virtudes, esto es: puede dar una explicación satisfactoria a diferentes propiedades observacionales del Universo actual (como por ejemplo, la nucleosíntesis primordial, los corrimientos al rojo de fuentes extragalácticas, radiación del fondo cósmico de microondas,...). Pero también presenta inconvenientes, tales como: que sólo puede describir modelos de universos desacelerados y por ello no puede reproducir las observaciones provenientes de supernovas de tipo Ia distantes; tampoco puede explicar las anisotropías del fondo de microondas, ni realmente el carácter inflacionario del Universo primitivo.

Usualmente se considera que el Modelo Cosmológico Estándar está incompleto en vez de ser erróneo. De hecho, el Modelo Cosmológico Estándar se puede transformar en un “modelo acelerado” añadiendo un ingrediente nuevo que se comporta como un fluido con presión negativa. El candidato más veterano y estudiado para esta componente perdida es la constante cosmológica  $\Lambda$ , la cual es equivalente a un fluido perfecto con densidad y presión constantes, relacionadas por la ecuación de estado  $P = -\rho$ . Ahora generalizaremos esta situación en la sección siguiente considerando un campo  $\Phi$  dependiente del tiempo y espacialmente

homogéneo, que evoluciona suavemente con su potencial  $V(\Phi)$ . El modelo cosmológico resultante de tener en cuenta la aceleración actual de un universo plano se denomina **Nueva Cosmología Estándar**.

## 2.2. Energía oscura

Consideraremos un campo  $\Phi$  dependiente del tiempo y espacialmente homogéneo, que evoluciona progresivamente con su potencial  $V(\Phi)$ . Los modelos cosmológicos resultantes se conocen como **modelos de quintaesencia**. En estos modelos, el campo escalar se puede interpretar como un fluido con presión negativa dada por

$$P = w\rho \quad -1 \leq w < -\frac{1}{3} . \quad (2.3)$$

La quintaesencia permite un amplio rango de modelos, incluyendo un parámetro  $w$  constante o dependiente del tiempo. Sin embargo, algunos de estos modelos admiten una cualidad muy atractiva llamada *solución tracker*, que permite resolver en parte el problema de la coincidencia cósmica<sup>1</sup>. Estos modelos se caracterizan por tener un parámetro  $w$  aproximadamente constante, por ello en este capítulo nos centraremos en las ecuaciones de estado con  $w$  constante.

Existen varios motivos que favorecen la elección del candidato del campo escalar. En primer lugar, mientras que la constante cosmológica no posee todavía una interpretación física completamente satisfactoria, el campo escalar aparece naturalmente en las ecuaciones de campo de un gran número de teorías alternativas a la Relatividad General. En efecto, la inflación primordial usa también un campo escalar que en tal caso se denomina inflatón.

Ahora, consideremos un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con un campo de quintaesencia. Consideraremos que el tensor energía impulso,  $T_{\mu\nu}$ , tiene la forma general de un fluido perfecto, esto es,

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) , \quad (2.4)$$

donde  $\rho$  es la densidad (media) de materia y  $P$  es la presión. Por lo tanto, las ecuaciones de Einstein se expresan como:

---

<sup>1</sup>Este problema hacer referencia a un problema de valores iniciales. De hecho, ya que la quintaesencia y la densidad de materia evolucionan de manera diferente con la expansión del universo, las condiciones en el universo temprano se deben elegir con mucho cuidado para que la solución sea comparable con los valores de los parámetros en la actualidad. En cambio, en un modelo tracker se permiten un rango muy amplio de condiciones iniciales dando una evolución común para el tiempo presente y de este modo se evita parcialmente el problema.

$$\frac{3\dot{R}^2}{R^2} + \frac{3K}{R^2} = 8\pi G\rho, \quad (2.5)$$

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{K}{R^2} = -8\pi GP. \quad (2.6)$$

Usando la primera ecuación (2.5), podemos reescribir la segunda (2.6) como

$$\frac{3\ddot{R}}{R} = -4\pi G(\rho + 3P). \quad (2.7)$$

La ecuación anterior nos proporciona la ley de conservación de la energía, que se puede escribir de la forma siguiente

$$\dot{\rho}R + 3(\rho + P)\dot{R} = 0. \quad (2.8)$$

Además, sabemos que la ecuación de estado para los campos de quintaesencia,  $\Phi$ , es

$$P = w\rho, \quad (2.9)$$

donde  $w \in (-1, -\frac{1}{3})$ ,<sup>2</sup>  $P = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi)$ , y  $\rho = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi)$ , sujetos a la ley de conservación siguiente [53]

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3(1+w)}, \quad (2.10)$$

donde el subíndice “0” indica “los valores presentes”.

Introduzcamos las cantidades adimensionales siguientes

$$\Omega_K \equiv \frac{-K}{R_0^2 H_0^2} \quad \Omega_\Phi \equiv \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2} \quad (2.11)$$

donde  $H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$  es el parámetro de expansión de Hubble, habiéndose denotado por  $H_0$  al valor actual. Usando las expresiones (2.9)-(2.11) en la ecuación de campo (2.5), obtenemos la siguiente ecuación diferencial (ecuación de Friedmann) para el factor de escala  $R(t)$ :

$$\dot{R}^2 = R_0^2 H_0^2 \left( \Omega_\Phi \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3w+1} + \Omega_K \right). \quad (2.12)$$

En la tabla 2.1 resumimos algunas soluciones particulares de la ecuación (2.12), donde  $C$  y  $D$  son constantes.

---

<sup>2</sup>Se necesita un valor  $w < -1/3$  para tener aceleración cósmica.

		Parámetro $w$	
		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$K = 0$	$Ct + D$	$\frac{C^2}{2}t^2 + CDt + \frac{D^2}{2}$	$D \exp(Ct)$
$K = -1$	$Ct + D$	$\frac{C}{4}t^2 + Dt + \frac{D^2 - 1}{C}$	$\frac{\sinh(Ct + D)}{C}$
$K = 1$	$Ct + D$	$\frac{(\frac{C}{2}t + D)^2 + 1}{C}$	$\frac{\cosh(Ct + D)}{C}$

Tabla 2.1: Soluciones particulares a la ecuación de Friedmann con un campo de quintaesencia.

## 2.3. Energía fantasma

En la sección anterior sólo hemos considerado valores de  $w$  entre  $-\frac{1}{3}$  y  $-1$ . Pero, ¿qué ocurre para  $w < -1$ ? La sustancia cósmica con  $w < -1$ , se llama **energía fantasma**. Últimamente ha recibido una atención creciente. De hecho, WMAP ha confirmado que aproximadamente el setenta por ciento de la energía del Universo está en forma de energía oscura. Además, estas observaciones recientes no excluyen, sino que incluso sugieren, un valor menor que  $-1$  para el parámetro de la ecuación de estado  $w$ . Esto significa que al menos para una ecuación de estado de un fluido perfecto, el valor absoluto para la presión negativa excede el valor positivo de la densidad de energía, es decir,  $\rho + P < 0$ , y por lo tanto se viola la condición de energía dominante. Esta violación permitiría la existencia de agujeros de gusano astrofísicos y cosmológicos, y máquinas del tiempo. Sin embargo, no es fácil mostrar cómo podrían surgir tales máquinas del tiempo y agujeros de gusano de la energía fantasma.

Una consecuencia más sorprendente producida por la energía fantasma es que en un tiempo finito el universo acabará en un catastrófico “big rip”. Big rip es un término acuñado por Caldwell [37], que corresponde a un **modelo cosmológico nuevo** en donde el factor de escala explota en un tiempo finito porque su aceleración cósmica es incluso mayor que la inducida por una constante cosmológica. En este modelo cada componente del universo, incluso las partículas más elementales, va más allá del horizonte de cualquier otra componente del universo en un tiempo cósmico finito.

Para un modelo cosmológico general con energía fantasma, el tiempo en el que tendría lugar el big rip depende tanto del tamaño inicial del universo como del valor de  $w$  de tal forma que, cuanto mayor sean en valor absoluto esas cantidades, antes ocurrirá el big rip. El comportamiento del universo después del big rip es en algunos aspectos más sorprendente incluso que el big rip en sí, ya que su tamaño disminuye progresivamente desde infinito hasta un tamaño cero en un tiempo infinito [véase figura 2.1].

Revisemos esto con un poco más de detalle; para ello consideraremos sobre todo la evolución a tiempos tardíos de un universo homogéneo e isótropo. Además, vamos a modelar la energía oscura como energía fantasma, que en esta sección la describiremos a través de un fluido perfecto que satisface la siguiente ecuación de estado

$$P = w\rho, \quad (2.13)$$

donde  $w$  es constante y menor que  $-1$ . De la ecuación de conservación se obtiene que  $\rho = \tilde{A}R^{-3(w+1)}$ , donde  $\tilde{A}$  es una constante de integración. Luego, para  $w < -1$  la densidad de energía crece con el factor de escala en lugar de disminuir. Para simplificar, no vamos a considerar otros contenidos materiales, ya que sus densidades de energía disminuyen con el tiempo cósmico y su influencia la podemos considerar despreciable en comparación con la densidad de energía de la materia fantasma a tiempos tardíos, que es cuando podría ocurrir el big rip<sup>3</sup>. Por lo tanto, la ecuación de Friedmann se puede expresar como

$$H^2 + \frac{K}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\tilde{A}R^{-3(w+1)}, \quad (2.14)$$

donde  $H$  es la constante de Hubble y  $K = 1, -1, 0$ , corresponde a los casos de secciones espaciales esféricas, hiperbólicas o planas del modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker respectivamente.

Para el caso más favorecido de secciones espaciales planas ( $K = 0$ ), el factor de escala está relacionado con el tiempo cósmico  $t$  como

$$R(t) = \left[ R_0^{3(w+1)/2} + \frac{3(w+1)}{2} C^{1/2} (t - t_0) \right]^{2/[3(w+1)]}, \quad (2.15)$$

donde  $R_0$  y  $t_0$  serán consideradas constantes de integración a lo largo del capítulo, correspondientes al radio y tiempo cósmico inicial del universo<sup>4</sup> y  $C = (8\pi G/3)\tilde{A}$ .

<sup>3</sup>En las secciones 3.2 y 3.4, se consideran las otras componentes materiales del universo junto con un gas de Chapligyn generalizado, introducido en la sección 3.2.

<sup>4</sup>La constante de integración  $t_0$  se puede considerar cero. Sin embargo,  $R_0$  tiene que ser no nula, ya que en otro caso el factor de escala se anularía para cualquier valor del tiempo cósmico.

Se observa que, para valores menores que  $-1$  de  $w$ , el factor de escala diverge en un tiempo cósmico finito [véase figura 2.1]

$$t_{\infty 0} = t_0 - \frac{2}{3(w+1)C^{1/2}} R_0^{3(w+1)/2} \quad , \quad (2.16)$$

si  $t$  varía entre  $t_0$  y  $t_{\infty 0}$ . Por esta razón, el universo podría alcanzar un final catastrófico [37]. Para valores del tiempo cósmico mayores que  $t_{\infty 0}$ , el factor de escala disminuye hasta anularse cuando  $t \rightarrow +\infty$  [véase la figura 2.1].

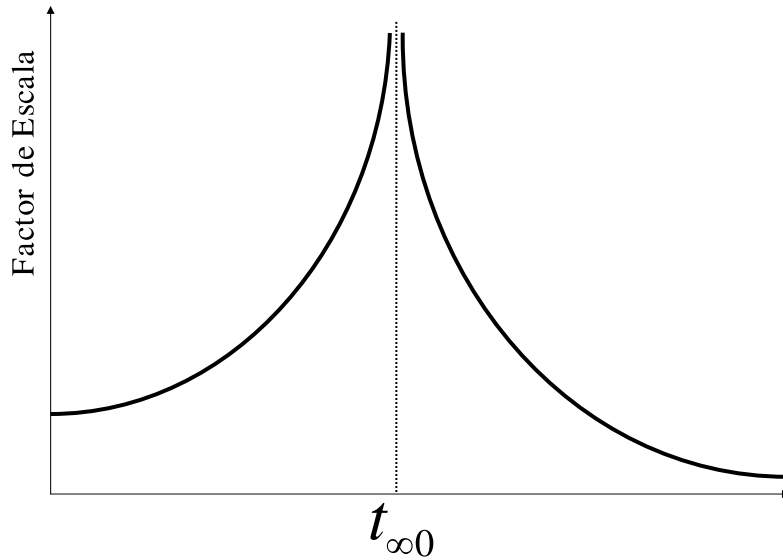


Figura 2.1: Podemos ver la evolución del factor de escala respecto del tiempo.  $t_{\infty 0}$  señala el tiempo en el cual ocurre el big rip.

De hecho,  $R \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow t_{\infty 0}$ . Esto marca el tiempo en el que ocurre el big rip y delimita la fase de contracción para  $t > t_{\infty 0}$ .

También se observa que cuando  $w$  se aproxima a  $-1$ , entonces  $t_{\infty 0}$  tiende a infinito. Una situación similar se obtiene en el caso de un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con geometría espacial hiperbólica o esférica [véase la figura 2.2]. Esto no es sorprendente ya que en el caso en que  $w$  sea  $-1$ , la geometría se corresponde con un espacio-tiempo tipo de Sitter laminado en secciones planas y, por lo tanto, no se alcanza un big rip. Además, para un factor de escala inicial  $R_0 > \exp\{2/[3(w+1)]\}$ , cuanto mayor sea el valor de  $w$ , mayor

es el valor de  $t_{\infty 0}$  que es cuando ocurre el big rip. Más aún, cuanto más pronto empiece a dominar la energía fantasma (es decir, cuanto mayor sea el valor de  $R_0$ ), antes alcanzará el universo el big rip.

En el caso esférico ( $K = 1$ ), el factor de escala tiene que ser mayor que  $R_{\min} = C^{1/(3w+1)}$ , ya que, en caso contrario, la ecuación de Friedmann (2.14) no está bien definida. Se tiene entonces que el tiempo cósmico se relaciona con el factor de escala como [81]

$$t - t_0 = \frac{2C^{1/(3w+1)}}{-1 - 3w} (CR^{-1-3w} - 1)^{1/2} \times {}_2F_1\left(\frac{3w+2}{3w+1}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1 - CR^{-1-3w}\right), \quad (2.17)$$

donde  ${}_2F_1(b, c; d; e)$  es una función hipergeométrica [81] [véase también el Apéndice A]. El tiempo cósmico es finito siempre que<sup>5</sup>  $-1 \leq 1 - CR^{-1-3w} \leq 0$ , es decir,  $R_{\min} \leq R \leq (2/C)^{1/(-1-3w)}$ . Para valores mayores del factor de escala, la expresión (2.17) deja de ser válida y, consecuentemente, no podemos concluir nada sobre la existencia o ausencia de un final cósmico del universo. Sin embargo, la diferencia entre los tiempos cósmicos que corresponden, respectivamente, a  $t_{\infty+}$  cuando el factor de escala “explota”, y a un tiempo cósmico  $t$  tal que  $R(t)$  es mayor que  $(2/C)^{1/(-1-3w)}$ , se puede expresar como

$$t_{\infty+} - t = -\frac{2C^{1/(3w+1)}}{3(w+1)} (CR^{-1-3w} - 1)^{-\frac{3(w+1)}{2(3w+1)}} \times {}_2F_1\left(\frac{3w+2}{3w+1}, \frac{3(w+1)}{2(3w+1)}; \frac{3(w+1)}{2(3w+1)} + 1; \frac{1}{1 - CR^{-1-3w}}\right). \quad (2.18)$$

Se puede comprobar además que la expresión anterior está bien definida, en particular la función hipergeométrica (véase el pie de página 5), siempre que  $R$  sea mayor o igual que  $(2/C)^{1/(-1-3w)}$ . Este valor del factor de escala se corresponde precisamente con el valor máximo permitido en la ecuación (2.17). Por consiguiente, podemos concluir que en un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con secciones espaciales con geometría esférica presenta un big rip cuando está lleno de energía fantasma con  $w$  constante y menor que  $-1$ . En este caso, tenemos que el tiempo cósmico que transcurre desde que el factor de escala toma su valor mínimo  $R_{\min}$  en  $t = t_0$  hasta que el radio del universo

---

<sup>5</sup>Una función hipergeométrica  ${}_2F_1(b, c; d; e)$  converge para todo valor  $e$  tal que  $|e| \leq 1$ , siempre que  $b + c - d < 0$ . Sin embargo, si  $0 \leq b + c - d < 1$  la función no converge en  $e = 1$ . Además, si  $1 \leq b + c - d$ , la función diverge en  $|e| = 1$  [81] [véase también el Apéndice A].



diverge es [28]

$$\begin{aligned}
t_{\infty+} &= C^{1/(3w+1)} \left[ \frac{2}{-1-3w} {}_2F_1 \left( \frac{3w+2}{3w+1}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -1 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3(w+1)} {}_2F_1 \left( \frac{3w+2}{3w+1}, \frac{3(w+1)}{2(3w+1)}; \frac{3(w+1)}{2(3w+1)} + 1; -1 \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.19}$$

De forma análoga, un universo lleno con energía fantasma con  $w$  constante también alcanza un big rip en el futuro si la geometría se corresponde con un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con secciones espaciales hiperbólicas ( $K = -1$ ). De hecho, se tiene que, en este caso, el tiempo cósmico depende del factor de escala como

$$t - t_0 = R {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{3w+1}; -\frac{1}{3w+1} + 1; -CR^{-1-3w} \right), \tag{2.20}$$

para  $R \leq C^{1/(3w+1)}$ . Por otro lado, resulta que para valores mayores del factor de escala, el tiempo cósmico se expresa como

$$\begin{aligned}
t_{\infty-} - t &= -\frac{2}{3(w+1)C^{1/2}} R^{3(w+1)/2} \\
&\quad \times {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{3(w+1)}{2(3w+1)}; \frac{3(w+1)}{2(3w+1)} + 1; -\frac{1}{C} R^{3w+1} \right),
\end{aligned} \tag{2.21}$$

donde  $t_{\infty-}$  corresponde al tiempo cósmico en el que el factor de escala se hace infinito. Las dos expresiones anteriores están bien definidas en  $R = C^{1/(3w+1)}$  (véase nota de pie de página 5). En este modelo, se puede observar que el factor de escala varía desde cero a infinito en un tiempo cósmico finito que vale [28]

$$\begin{aligned}
t_{\infty-} &= C^{1/(3w+1)} \left[ {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{3w+1}; -\frac{1}{3w+1} + 1; -1 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3(w+1)} {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{3(w+1)}{2(3w+1)}; \frac{3(w+1)}{2(3w+1)} + 1; -1 \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Antes de concluir esta sección, vamos a analizar si la inclusión de una densidad de energía de vacío positiva y constante, es decir, de una constante cosmológica

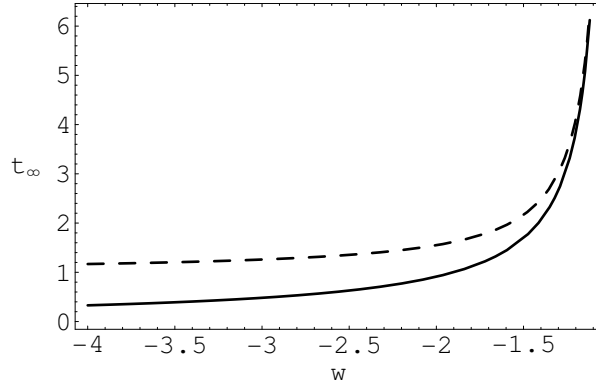


Figura 2.2: Esta figura muestra el comportamiento del tiempo cósmico en el que se alcanza el big rip respecto del parámetro  $w$  dado por el cociente entre la presión y la densidad de energía de la energía fantasma. La línea discontinua corresponde al caso de un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con secciones hiperbólicas. La línea continua corresponde con un espacio-tiempo homogéneo e isótropo con geometría espacial esférica. El tiempo cósmico se ha dividido por  $C^{1/(3w+1)}$ .

positiva  $\Lambda$ , puede aliviar el problema del big rip producido por una energía fantasma con ecuación de estado constante ( $w$  constante). Por simplicidad y analiticidad, vamos a restringirnos al caso de un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con geometría espacial plana. La ecuación de Friedmann en este caso es

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3} + CR^{-3(w+1)}. \quad (2.23)$$

La solución de la ecuación anterior es

$$R^{3(1+w)}(t) = R_0^{3(1+w)}(1-D)^{-2} \left( \exp \left[ \frac{3(1+w)}{2} \sqrt{\tilde{\Lambda}}(t-t_0) \right] - D \exp \left[ -\frac{3(1+w)}{2} \sqrt{\tilde{\Lambda}}(t-t_0) \right] \right)^2, \quad (2.24)$$

donde  $\tilde{\Lambda} = \Lambda/3$  y  $D$  es una constante positiva dada por

$$D = \frac{\sqrt{\tilde{\Lambda} + CR_0^{-3(1+w)}} - \sqrt{\tilde{\Lambda}}}{\sqrt{\tilde{\Lambda} + CR_0^{-3(1+w)}} + \sqrt{\tilde{\Lambda}}}. \quad (2.25)$$

De la ecuación (2.24), se obtiene que el factor de escala crece desde un valor inicial  $R_0$  hasta divergir en un tiempo cósmico finito; es decir, el universo sufrirá un

final cósmico, cuando  $t$  se aproxime a  $\tilde{t} = t_0 + (\ln D) / \left[ 3(1+w)\sqrt{\tilde{\Lambda}} \right]$ . Para  $\tilde{t} < t$ , el factor de escala disminuye y el universo colapsa cuando  $t$  tiende a valores infinitos. Además, cuanto mayor sea el valor de  $R_0$ , más pequeño es  $\tilde{t}$  y, por lo tanto, antes tendrá lugar el final cósmico del universo. Una conclusión similar se tiene para  $w$  (al menos para  $R_0 > 1$ ). También, se puede comprobar que  $\tilde{t}$  tiende a  $t_{\infty 0}$ , definido en la ecuación (2.16), cuando la constante cosmológica se anula. En resumen: la presencia de una constante cosmológica no modifica el comportamiento general del modelo y el big rip no se puede evitar en el caso de tener  $w$  constante y menor que  $-1$ . Además, una densidad de energía de vacío positiva no retrasa la aparición del big rip [véase la figura 2.3]. Esto lo podemos explicar de la siguiente manera: la presencia de una constante cosmológica positiva en el modelo induce un crecimiento mayor del parámetro de Hubble y, por lo tanto, el factor de escala crece más rápido, alcanzando antes el big rip.

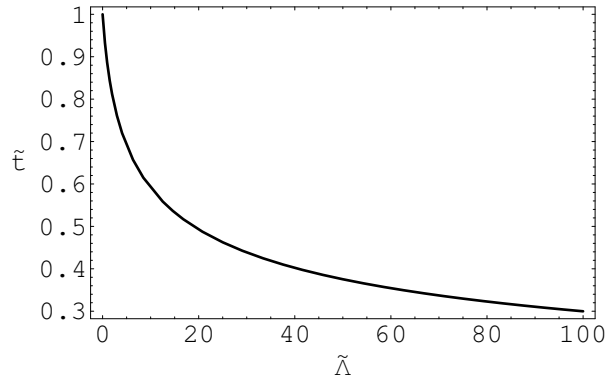


Figura 2.3: Esta figura muestra el comportamiento del tiempo cósmico en el que ocurre el big rip como una función de la constante cosmológica. Como muestra la gráfica, se tiene un valor mayor de  $\tilde{t}$  cuando no hay constante cosmológica. De hecho, cuanto mayor sea  $\tilde{\Lambda}$ , antes ocurre el big rip. La constante cosmológica y el tiempo cósmico han sido redefinidos por cantidades adimensionales dadas por  $\tilde{\Lambda}/(CR_0^{-3(1+w)})$  y  $-(3/2)(1+w)\sqrt{CR_0^{-3(1+w)/2}}(\tilde{t}-t_0)$ , respectivamente.

Todo nuestro tratamiento anterior tiene un carácter clásico. Sin embargo, a medida que uno se acerca al big rip hemos visto que la densidad de energía y la curvatura del espacio-tiempo aumentan, tendiendo a infinito en el big rip, el cual se convierte así en una singularidad real del espacio-tiempo. De esta forma, cabe esperar que en la vecindad inmediata de dicha singularidad se den las condiciones que requieren un tratamiento de carácter esencialmente cuántico del propio espacio-tiempo. Por ello, todos los resultados anteriores podrían verse afectados decisivamente en torno a la singularidad del big rip. No obstante, no es posible

todavía evaluar la naturaleza precisa y extensión de tales efectos cuánticos ya que, como es bien conocido, no disponemos aún de una teoría cuántica de la gravedad bien definida.

## 2.4. Campo escalar conformemente acoplado a la Gravedad

Consideraremos ahora otras posibles soluciones de las ecuaciones de Einstein. Usaremos para ello un tensor energía-impulso más general, aunque es difícil preservar las hipótesis de homogeneidad e isotropía. Sin embargo, existe una posibilidad que sí satisface estas simetrías. Se trata de emplear un campo escalar conformemente homogéneo,  $\Psi$ . En lo que sigue, usaremos para ello una acción con quintaesencia y un campo escalar conformemente acoplado a la Gravedad de la forma [84]

$$\begin{aligned} S &= \frac{-1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{K} + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \Psi_{,\mu} \Psi_{,\nu} + \xi R \Psi^2) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} + V(\Phi)) \\ &- \frac{1}{8\pi G} \int d^3x \sqrt{h} (1 - 8\pi G \xi \Psi^2) \text{tr} \mathcal{K}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde  $\xi$  es un factor numérico (en particular, para el caso conformemente acoplado corresponde a  $\xi = \frac{1}{4} [(n-2)/(n-1)]$ , donde  $n$  es la dimensión del espacio tiempo),  $\mathcal{K}$  la curvatura extrínseca, y  $\Phi$  el campo de quintaesencia.

En esta sección usaremos la métrica lorentziana en la forma siguiente:

$$ds^2 = R^2(\tau) \left[ -N^2 d\tau^2 + \frac{1}{1-Kr^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.27)$$

donde  $\tau$  es el tiempo conforme,  $\tau = \int dt/R(t)$ , y  $N$  la función lapso.

Es conveniente escribir el campo escalar acoplado como  $\sqrt{8\pi G} \Psi = \frac{\chi}{R}$ . En términos del tiempo conforme,  $\tau$ , la acción anterior se reduce a

$$S = C \int d\tau N \left[ 6R^2 K - \frac{6R'^2}{N^2} - K\chi^2 + \frac{\chi'^2}{N^2} + \frac{8\pi G}{N^2} R^2 \Phi'^2 - 8\pi G R^4 V(\Phi) \right], \quad (2.28)$$

donde  $C$  es una constante, y la prima denota la derivada con respecto a  $\tau$ ,  $\prime \equiv \frac{d}{d\tau}$ .

La variación respecto a  $R, \chi, \Phi$ , y  $N$  nos proporciona las ecuaciones de campo y la ligadura Hamiltoniana,

Ecuaciones de campo:

$$R: \quad 3R'' + 3KR + 4\pi GR\Phi'^2 - 8\pi GR^3V(\Phi) = 0 \quad (2.29)$$

$$\chi: \quad \chi'' + K\chi = 0 \quad (2.30)$$

$$\Phi: \quad 4R'\Phi' + 2R\Phi'' + R^3\frac{d}{d\Phi}V(\Phi) = 0 \quad (2.31)$$

Ligadura Hamiltoniana  $\left(\frac{\delta}{\delta N}\right)$ :

$$6KR^2 + 6R'^2 - K\chi^2 - \chi'^2 - 8\pi GR^2(\Phi'^2 + R^2V(\Phi)) = 0 \quad (2.32)$$

en el gauge  $N = 1$ .

A partir de la ecuación (2.30), obtenemos

$$K\chi^2 + \chi'^2 = M^2, \quad (2.33)$$

donde  $M$  es una constante (de este modo el campo contribuye como un campo de radiación); así, la ecuación (2.32) se reduce a

$$6KR^2 + 6R'^2 - M^2 - 8\pi GR^2(\Phi'^2 + R^2V(\Phi)) = 0. \quad (2.34)$$

Como la coordenada  $\tau$  viene definida por  $\frac{d\tau}{dt} = R^{-1}(t)$ , usando la ley de conservación para el campo de quintaesencia, la ecuación (2.34) se puede re-escribir como

$$6KR^2 + 6R^2\dot{R}^2 - M^2 - 4\pi G(3+w)R_0^{3(1+w)}\rho_0R^{-3w+1} = 0. \quad (2.35)$$

Hemos resuelto la ecuación (2.35) (ecuación de Friedmann) solamente para el caso particular  $K = 0$  donde la solución viene dada en forma implícita por [99],

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{3}{2M^2}}R^2 {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1-3w}, \frac{3-3w}{1-3w}; -\frac{CR^{-3w+1}}{M^2}\right) \quad (2.36)$$

donde  $C = 4\pi G(3+w)R_0^{3(1+w)}\rho_0$ ,  $-3 \leq w < \frac{1}{3}$  y  $R \leq \left(\frac{M^2}{C}\right)^{1/(1-3w)}$ .

Por lo tanto, en este caso tenemos nuevas soluciones para energía oscura dada por un campo de quintaesencia, una constante cosmológica o incluso energía fantasma. Para estudiar valores mayores del factor de escala, esto es  $R \geq \left(\frac{M^2}{C}\right)^{1/(1-3w)}$ , se tiene que el tiempo cósmico viene expresado por

$$t_\infty - t = -\sqrt{\frac{8}{3C}}\frac{1}{w+1}R^{\frac{3}{2}(w+1)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3(w+1)}{2(3w-1)}, \frac{3(w+1)}{2(3w-1)} + 1; -\frac{M^2}{CR^{-3w+1}}\right), \quad (2.37)$$

para valores de  $w < -1$ . Dado que las dos expresiones anteriores están bien definidas en  $R = \left(\frac{M^2}{C}\right)^{1/(1-3w)}$  [véase el apéndice A], se obtiene que en este modelo aparece la singularidad del big rip en un tiempo cósmico finito dado por el valor [véase la figura 2.4]

$$t_\infty = M^{\frac{3(1+w)}{1-3w}} C^{\frac{2}{3w-1}} \left[ \sqrt{\frac{3}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1-3w}, \frac{3-3w}{1-3w}; -1\right) - \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{1}{w+1} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3(w+1)}{2(3w-1)}, \frac{3(w+1)}{2(3w-1)} + 1; -1\right) \right], \quad (2.38)$$

donde  $-3 \leq w < -1$ .

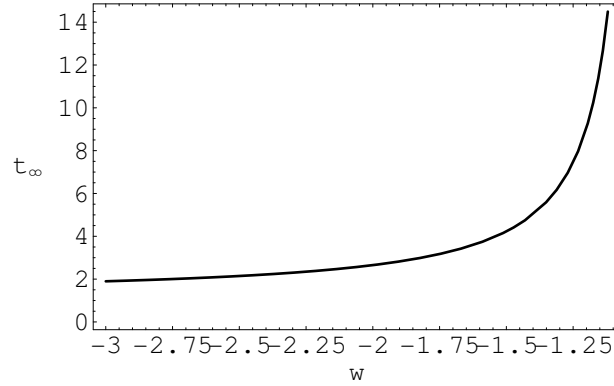


Figura 2.4: Esta figura muestra el comportamiento del tiempo cósmico en el que se alcanza el big rip respecto del parámetro  $w$  para el caso de un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con un campo escalar acoplado conformemente a la Gravedad. El tiempo cósmico se ha dividido por  $C^{\frac{2}{1-3w}} M^{\frac{3(1+w)}{1-3w}}$ .

## 2.5. Resumen y comentarios

En este capítulo hemos introducido los conceptos básicos en los que se va apoyar nuestro trabajo posterior. Se han revisado las soluciones para la ecuación de Friedmann en un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker donde la energía oscura viene modelada por un campo de quintaesencia, encontrándose nuevas soluciones para  $K \neq 0$ . Seguidamente hemos estudiado la dinámica de un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con energía fantasma dada por un fluido perfecto con ecuación de estado constante, es decir,  $P = w\rho$

con  $w$  constante y menor que  $-1$ . Se puede ver que el universo alcanza un big rip independientemente de la geometría espacial de éste. Además, se muestra en estas condiciones que la presencia de una energía constante positiva, o constante cosmológica,  $\Lambda$ , en el universo no puede evitar la aparición de un final cósmico a tiempo finito. De hecho, el universo alcanza el big rip antes de lo que lo haría si fuera  $\Lambda = 0$ .

Por último se han estudiado nuevas soluciones a la ecuación de Friedmann en el caso plano donde el campo de quintaesencia se ha introducido con acoplo conforme, en el rango  $-3 \leq w \leq -\frac{1}{3}$  que incluye todos los casos interesantes, esto es: energía oscura ( $w > -1$ ), constante cosmológica ( $w = -1$ ) y energía fantasma ( $w < -1$ ). De nuevo, se ha obtenido que el universo presenta la singularidad del big rip cuando se considera que contiene energía fantasma.





## Capítulo 3

# Modelo generalizado de Chaplygin: Singularidades futuras

Discutiremos modelos de energía oscura que podrían describir de manera efectiva la aceleración actual del Universo. De forma más precisa para un espacio cuatro-dimensional de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker consideraremos que la energía fantasma viene descrita por un gas de Chaplygin (generalizado) fantasma que viola la condición de energía dominante. Para este contenido material se obtiene que el universo nunca alcanzará la singularidad del big rip (de hecho, la geometría resultante es asintóticamente de Sitter). También veremos cómo se puede describir este modelo de energía oscura en términos de campos escalares, correspondiendo a un campo escalar mínimamente acoplado, un campo escalar de Born-Infeld y a un campo escalar de Born-Infeld generalizado. Al final del capítulo se introducirá un modelo fenomenológicamente viable donde la energía oscura viene descrita por un gas de Chaplygin generalizado fantasma.

### 3.1. Introducción

En este capítulo, veremos que si la energía oscura está modelada por un gas de Chaplygin generalizado, entonces el universo escapará del big rip y se expandirá para siempre. Otros modelos de energía fantasma; es decir, contenidos materiales con  $P + \rho < 0$  y densidad de energía positiva, muestran una propiedad similar que ya ha sido propuesta [85–87, 113, 143]. Por ejemplo, esto se puede conseguir considerando un campo escalar mínimamente acoplado con un potencial apropiado [87, 143] o con un campo homogéneo de tipo Born-Infeld [85, 86, 113]. Sin embargo, en estos modelos, el campo escalar tiene el término cinético negativo. En este capítulo, proponemos un modelo fenomenológico alternativo para describir la energía fantasma a través de un fluido que, pri-

meramente, satisface la ecuación de estado de un gas de Chaplygin generalizado [20–24, 26, 27, 78, 79, 104], y en segundo lugar, viola la condición de energía dominante [56]. Además, para este contenido material tan peculiar un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker nunca alcanzaría la singularidad del big rip.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. En la sección 3.2, se introduce y estudia un modelo de energía oscura que se basa en un gas de Chaplygin generalizado. En la sección 3.3, analizaremos este modelo y lo relacionaremos con campos escalares correspondientes a un campo escalar mínimamente acoplado, a un campo escalar de Born-Infeld y a un campo escalar de Born-Infeld generalizado. En la sección 3.4, se describe un modelo fenomenológicamente viable donde la energía oscura viene dada como un gas de Chaplygin generalizado fantasma. Al final del capítulo, en la sección 3.5, se puede encontrar un breve resumen y se discuten los resultados obtenidos en el mismo.

## 3.2. Gas de Chaplygin generalizado y energía fantasma

El gas de Chaplygin generalizado se puede describir como un fluido perfecto con la siguiente ecuación de estado [20–24, 26, 27, 78, 79, 104]

$$P = -A_{\text{ch}}/\rho^\alpha, \quad (3.1)$$

donde  $A_{\text{ch}}$  es una constante positiva y  $\alpha$  es un parámetro. En el caso particular  $\alpha = 1$ , la ecuación de estado (3.1) corresponde a un gas de Chaplygin. La conservación del tensor momento-energía implica

$$\rho = \left[ A_{\text{ch}} + \frac{(\rho_0^{\alpha+1} - A_{\text{ch}})R_0^{3(\alpha+1)}}{R^{3(\alpha+1)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (3.2)$$

donde  $R_0$  y  $\rho_0$  son el factor de escala inicial y la densidad de energía, respectivamente. Se puede comprobar que la condición de energía dominante se satisface siempre que  $A_{\text{ch}} < \rho_0^{\alpha+1}$ . Esta condición está directamente relacionada con los valores iniciales del modelo y con la ecuación específica de estado a través de la constante:

$$B \equiv (\rho_0^{\alpha+1} - A_{\text{ch}})R_0^{3(\alpha+1)}. \quad (3.3)$$

Para valores positivos de  $B$ ,  $P + \rho$  es positivo y se satisface la condición de energía dominante. Éste no es el caso cuando  $B$  es negativo. Estudiemos el comportamiento de la densidad de energía para ambos casos.

Cuando el parámetro  $B$  es positivo, se tiene que  $\rho$  es una función de  $R$  decreciente. De hecho, para  $1 + \alpha > 0$  el gas de Chaplygin generalizado interpola entre polvo, para factores de escala pequeños, y una densidad de energía constante, para factores de escala grandes. Esta propiedad es la que promovió al gas de Chaplygin como un candidato para unificar energía oscura y materia oscura [20–24, 26, 27, 78, 79, 104]. Para  $1 + \alpha < 0$ , la densidad de energía se comporta de manera bien distinta; es decir,  $\rho$  se aproxima a  $A_{\text{ch}}^{1/(1+\alpha)}$  para factores de escala pequeños y se comporta como un fluido sin presión a tiempos tardíos.

Cuando el parámetro  $B$  es negativo, la densidad de energía es una función del factor de escala creciente. Además,  $\rho$  es mayor que  $A_{\text{ch}}^{1/(1+\alpha)}$  cuando  $1 + \alpha < 0$ , alcanzando su valor mínimo en  $R = 0$  y divergiendo cuando el factor de escala se aproxima a su valor máximo

$$\bar{R} \equiv \left( -\frac{B}{A_{\text{ch}}} \right)^{1/[3(1+\alpha)]}. \quad (3.4)$$

En lo que sigue, no vamos a considerar este caso ( $B < 0$  y  $1 + \alpha < 0$ ). Por otro lado, si  $1 + \alpha > 0$  y  $B < 0$ , el factor de escala es mayor que  $\bar{R}$ , de tal forma que  $\rho$  se anula en este valor del factor de escala y se aproxima a  $A_{\text{ch}}^{1/(1+\alpha)}$  cuando el factor de escala tiende a infinito. Por ello, nosotros analizaremos este último caso, que se puede considerar un modelo de energía fantasma ya que  $\rho > 0$  y  $P + \rho < 0$ . Denotaremos a este modelo como gas de Chaplygin generalizado fantasma. Nótese que el gas de Chaplygin generalizado con  $\alpha$  negativo ha sido criticado como candidato posible para energía oscura [17, 123]. Sin embargo, estas críticas corresponden al caso  $B > 0$  que no es el del gas de Chaplygin generalizado fantasma; es decir,  $B$  negativo.

Como en el capítulo anterior, vamos a considerar un espacio-tiempo homogéneo e isótropo, donde la energía oscura viene dada ahora por un gas de Chaplygin generalizado fantasma ( $B < 0$  y  $-1 < \alpha$ ). La ecuación de Friedmann en este caso es

$$H^2 + \frac{K}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} [\rho_{\text{DE}} + \rho_{\text{DM}} + \rho_{\text{R}}], \quad (3.5)$$

donde  $\rho_{\text{DE}}$ ,  $\rho_{\text{DM}}$  y  $\rho_{\text{R}}$  corresponden, respectivamente, a las densidades de energía de la energía oscura, materia oscura y radiación.

Para el estudio a tiempos tardíos, donde podría ocurrir el big rip, es una buena aproximación mantener solamente  $\rho_{\text{DE}}$  en la ecuación anterior ya que  $\rho_{\text{DM}}$  y  $\rho_{\text{R}}$  disminuyen con el tiempo cósmico. Por consiguiente, la ecuación de Friedmann se reduce a

$$H^2 + \frac{K}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \left[ A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(\alpha+1)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (3.6)$$

Si el espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker tiene geometría espacial plana, entonces el tiempo cósmico se relaciona con el factor de escala como [28]

$$t - t_0 = \frac{2D^{-\frac{1}{2}}A_{\text{ch}}^{-\frac{1}{2(1+\alpha)}}}{3(1+2\alpha)} \left[ 1 + \frac{B}{A_{\text{ch}}}R^{-3(1+\alpha)} \right]^{\frac{1+2\alpha}{2(1+\alpha)}} \times {}_2F_1 \left( 1, \frac{1+2\alpha}{2(1+\alpha)}; \frac{3+4\alpha}{2(1+\alpha)}; 1 + \frac{B}{A_{\text{ch}}}R^{-3(1+\alpha)} \right), \quad (3.7)$$

donde  ${}_2F_1$  es una función hipergeométrica,  $D = 8\pi G/3$  y  $-1/2 < \alpha$ . Lo primero que obtenemos es que el factor de escala es mayor que  $\bar{R}$ , definido en la ecuación (3.4). En este caso no hay big rip; cuando el factor de escala diverge, el tiempo cósmico también diverge [véase el apéndice A]. En contraposición con el caso estudiado en el capítulo anterior, el modelo actual no presenta un final cósmico del universo a un tiempo finito en el futuro porque el parámetro de Hubble tiende a una constante no nula para valores del factor de escala grandes. Por consiguiente, a tiempos tardíos la geometría del modelo es asintóticamente de Sitter. Aunque no se ha podido obtener expresiones analíticas equivalentes a la ecuación (3.7) para  $-1 < \alpha < -1/2$ , se tiene una conclusión similar, ya que  $H^2$  tiende a una constante positiva no nula cuando  $R \rightarrow +\infty$ .

Cuando la geometría del espacio-tiempo homogéneo e isótropo es esférica, el parámetro de Hubble está bien definido siempre que  $R > R_{\text{min}}$ , donde  $R_{\text{min}}$  es tal que  $H(R_{\text{min}}) = 0$ . La expresión explícita de  $R_{\text{min}}$  está dada en el apéndice B. Se prueba que  $R_{\text{min}}$  es mayor que el valor mínimo del factor de escala para el caso de geometría espacial plana dado en la ecuación (3.4). Además, el tiempo cósmico para  $K = 1$  satisface la siguiente desigualdad

$$t - t_0 > \int_{\bar{R}}^R \left[ DR^2 \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \right]^{-\frac{1}{2}} dR - \int_{\bar{R}}^{R_{\text{min}}} \left[ DR^2 \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \right]^{-\frac{1}{2}} dR. \quad (3.8)$$

El segundo término de la parte de la derecha de la desigualdad es finito. De hecho, es el tiempo cósmico para el caso de secciones espaciales planas correspondiente a  $R = R_{\text{min}}$ . Además, el primer término de la parte derecha se corresponde con el tiempo cósmico para la geometría  $K = 0$  con un factor de escala dado  $R > \bar{R}$ . Como se puede ver, para factores de escala grandes, el tiempo cósmico para  $K = 1$  diverge ya que  $t - t_0$  diverge para el caso de geometría espacial plana (primer término de la parte derecha). Por lo tanto, el universo no alcanzará un final cósmico en su futuro.

Análogamente, el tiempo cósmico para un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con secciones espaciales hiperbólicas puede acotarse inferiormente como

$$\begin{aligned}
 t - t_0 > \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ R_{\min} - \bar{R} \right. \\
 &+ \int_{\bar{R}}^R \left[ DR^2 \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \right]^{-\frac{1}{2}} dR \\
 &\left. - \int_{\bar{R}}^{R_{\min}} \left[ DR^2 \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \right]^{-\frac{1}{2}} dR \right\}. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Nos gustaría puntualizar que los dos últimos términos de la parte derecha de la desigualdad coinciden precisamente con los de la parte derecha del expresión (3.8). Por lo tanto, usando un argumento similar al usado en el caso  $K = 1$ , podemos concluir que no se alcanzará un big rip para  $K = -1$ . Además, el factor de escala crece desde  $\bar{R}$  hasta infinito.

Una vez analizado el comportamiento de un espacio-tiempo homogéneo e isótropo a tiempos tardíos con ecuación de Friedmann (3.5), veamos cómo se comporta para factores de escala pequeños. En este caso, es necesario considerar los otros contenidos materiales en el universo, es decir, materia oscura y radiación.

La densidad de energía de una gas de Chaplygin generalizado fantasma se anula cuando el factor de escala se aproxima a  $\bar{R}$ , lo que sólo puede ocurrir en los casos de secciones planas e hiperbólicas. Por consiguiente, en  $R = \bar{R}$  la presión tiene que divergir induciendo una singularidad en la geometría. De hecho, este podría ser el caso si  $\alpha$  es positiva. La curvatura escalar para  $K = \pm 1, 0$  es

$$\mathcal{R} = 6 \left( \dot{H} + 2H^2 + \frac{K}{R^2} \right) = 3D \left( \rho_{\text{DM}} + \rho_{\text{DE}} + \frac{3A_{\text{ch}}}{\rho_{\text{DE}} \alpha} \right), \quad (3.10)$$

donde el punto representa la derivación respecto del tiempo cósmico. Como se puede ver,  $\mathcal{R}$  está bien definido para cualquier factor de escala en el caso de geometría esférica (recordemos que  $\bar{R} < R_{\min}$ ). Por otro lado, para  $K = -1, 0$ , la curvatura escalar  $\mathcal{R}$  es finita (incluso en  $R = \bar{R}$ ) siempre que  $-1 < \alpha < 0$ . El mismo resultado se deduce para valores positivos de  $\alpha$ , excepto en  $R = \bar{R}$ , donde existe una divergencia de  $\mathcal{R}$ .

Antes de concluir esta sección, analicemos el parámetro  $w(R) = (P/\rho)$  de la energía oscura, que de alguna manera cuantifica la desviación del gas de Chaplygin generalizado de una constante cosmológica [véase la figura 3.1] y se puede expresar en términos del factor de escala como

$$w = \frac{B}{B + A_{\text{ch}} R^{3(1+\alpha)}} - 1. \quad (3.11)$$

Como se esperaba,  $w$  es menor que  $-1$  para el conjunto de parámetros que hemos considerado. A tiempos tardíos,  $w$  se aproxima a  $-1$ , es decir, el espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker es asintóticamente de Sitter. Por otro lado,  $w$  diverge cerca de  $\bar{R}$  (sólo para  $K = 0, -1$ ). Sin embargo, se puede ver que el parámetro efectivo  $w_{\text{eff}}$  dado por

$$w_{\text{eff}} = \frac{P_{\text{DE}} + P_{\text{R}}}{\rho_{\text{DE}} + \rho_{\text{DM}} + \rho_{\text{R}}}, \quad (3.12)$$

está bien definido en  $R = \bar{R}$  para  $-1 < \alpha < 0$  y  $K = 0, -1$ . Nos gustaría puntualizar que también  $w_{\text{eff}}$  es divergente en  $R = \bar{R}$  para valores positivos de  $\alpha$  y  $K = 0, -1$ .

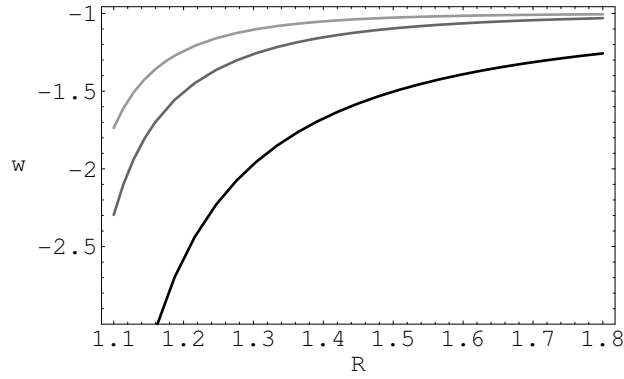


Figura 3.1: Esta figura muestra el comportamiento del parámetro  $w$  dado en la ecuación (3.11) como una función de la variable adimensional  $R/\bar{R}$ . La gráfica inferior (la más oscura) se corresponde con  $\alpha = -0,1$ . La superior (la más clara) corresponde a  $\alpha = 2$ . Finalmente, la del medio muestra  $w$  para el gas de Chaplygin, es decir,  $\alpha = 1$ . Como se puede ver, el gas de Chaplygin generalizado tiende a una constante cosmológica positiva ( $w = -1$ ) para valores grandes del factor de escala.

En resumen, hemos visto que un gas de Chaplygin generalizado puede describir energía fantasma. Además, este contenido material puede evitar la aparición de un final cósmico en el futuro del universo. Esto no es sorprendente ya que la densidad de energía de un gas de Chaplygin generalizado tiende a un valor positivo constante para  $B < 0$  y  $0 < \alpha + 1$ . Por lo tanto, un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker lleno con este gas es asintóticamente de Sitter.

### 3.3. Gas de Chaplygin generalizado fantasma y campos escalares

Hasta ahora, hemos descrito el gas de Chaplygin generalizado fantasma como un fluido perfecto con una ecuación de estado peculiar (3.1). En esta sección, describiremos el gas de Chaplygin generalizado fantasma en términos de campos escalares. Primero, veremos cómo el gas de Chaplygin generalizado (con parámetro  $B$  negativo, véase la ecuación (3.3)) puede surgir en el contexto de teorías de Born-Infeld generalizadas fantasmas. Para este propósito, vamos a considerar el lagrangiano  $\mathcal{L}_\phi$  definido como

$$\mathcal{L}_\phi = -A_{\text{ch}}^{\frac{1}{1+\alpha}} \left[ 1 + (-g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi)^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}} \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \quad (3.13)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es la métrica del espacio-tiempo y  $\phi$  es un campo escalar. Para un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,  $\mathcal{L}_\phi$  se reduce a

$$\mathcal{L}_\phi = -A_{\text{ch}}^{\frac{1}{1+\alpha}} \left[ 1 + (\dot{\phi})^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \quad (3.14)$$

El punto se corresponde de nuevo con la derivación respecto del tiempo cósmico. Se puede ver que la densidad de energía  $\rho_\phi$  y la presión  $P_\phi$  asociadas a  $\mathcal{L}_\phi$  son [6–8, 40, 61, 117, 118],

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= A_{\text{ch}}^{\frac{1}{1+\alpha}} \left[ 1 + (\dot{\phi})^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \right]^{-\frac{1}{1+\alpha}}, \\ P_\phi &= -A_{\text{ch}}^{\frac{1}{1+\alpha}} \left[ 1 + (\dot{\phi})^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por lo tanto,  $\rho_\phi$  y  $P_\phi$  satisfacen la ecuación de estado de un gas de Chaplygin generalizado, es decir,  $P_\phi = -A_{\text{ch}}/\rho_\phi^\alpha$ . La diferencia entre la lagrangiana definida por la expresión (3.13) y la dada en [20–24, 26, 27, 78, 79, 104] es que el término de la energía cinética para el campo escalar  $\phi$  es negativo. Además, se puede ver que

$$P_\phi/\rho_\phi = -\left[ 1 + (\dot{\phi})^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \right]. \quad (3.16)$$

Esta expresión muestra que el campo escalar  $\phi$  se comporta como energía fantasma [véase también la ecuación (3.17)]. También, esta característica de  $\phi$  permite valores negativos del parámetro  $B$ , definido en la ecuación (3.3), como ha sido considerado en la sección anterior. Adicionalmente, por otro lado, la derivada temporal de  $\phi$  depende del factor de escala como

$$\dot{\phi}^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} = \frac{-B}{B + A_{\text{ch}} R^{3(1+\alpha)}}. \quad (3.17)$$

Más aún, para un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con secciones espaciales planas o hiperbólicas llenas con gas de Chaplygin generalizado con  $B < 0$  y  $-1 < \alpha$ , el factor de escala puede tomar cualquier valor tal que  $\bar{R} \leq R$  ( $\bar{R}$  está definido en la ecuación (3.4)). Por consiguiente, para  $-1 < \alpha < 0$ ,  $\dot{\phi}$  se anula cuando  $R$  tiende a  $\bar{R}$ . Sin embargo, para valores positivos de  $\alpha$ , la derivada temporal de  $\phi$  diverge cuando  $R$  tiende a  $\bar{R}$ . Para valores grandes del factor de escala se tiene el comportamiento contrario, es decir,  $\dot{\phi}$  tiende a cero cuando  $0 < \alpha$  y diverge en el caso  $-1 < \alpha < 0$ . La divergencia de  $\dot{\phi}$  no es dañina para valores grandes del factor de escala, ya que la geometría del espacio-tiempo considerado se comporta como un espacio-tiempo tipo de Sitter, y por lo tanto, no hay ninguna singularidad. Adicionalmente, en un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con geometría espacial plana, el campo escalar  $\phi$  varía con el factor de escala como [28]

$$\phi - \phi_0 = \frac{A_{\text{ch}}^{-\frac{1}{2(1+\alpha)}}}{\sqrt{6\pi G}} \left[ 1 - \left( \frac{\bar{R}}{R} \right)^{3(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} \times {}_2F_1 \left( \frac{1}{1+\alpha}, \frac{1}{2(1+\alpha)}; \frac{1}{2(1+\alpha)} + 1; 1 - \left( \frac{\bar{R}}{R} \right)^{3(1+\alpha)} \right), \quad (3.18)$$

donde  $-1 < \alpha$  y  $\phi_0$  es una constante de integración correspondiente al valor que toma  $\phi$  en  $R = \bar{R}$ . El campo escalar  $\phi$  es finito para cualquier valor del factor de escala siempre que  $\alpha$  sea positiva [véase el apéndice A]. Para  $-1 < \alpha < 0$ , la afirmación anterior sigue siendo cierta excepto para valores muy grandes del factor de escala, donde  $\phi$  diverge [véase la figura 3.2].

En lo que sigue, vamos a estudiar cómo el gas de Chaplygin generalizado fantasma se puede describir en términos de un campo escalar fantasma de Born-Infeld,  $\psi$ , cuya Lagrangiana es

$$\mathcal{L}_\psi = -V(\psi) \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \nabla_\mu \psi \nabla_\nu \psi}. \quad (3.19)$$

Para un espacio-tiempo homogéneo e isótropo, la densidad de energía  $\rho_\psi$  y la presión  $P_\psi$  asociada a  $\psi$  son [6–8, 40, 61, 85, 86, 113, 117, 118]

$$\rho_\psi = \frac{V(\psi)}{\sqrt{1 + \dot{\psi}^2}}, \quad P_\psi = -V(\psi) \sqrt{1 + \dot{\psi}^2}. \quad (3.20)$$

Obviamente, para el gas de Chaplygin, es decir,  $\alpha = 1$ , con características de energía fantasma, el potencial  $V(\psi)$  es constante;  $V = \sqrt{A_{\text{ch}}}$  [véase la ecuación (3.13) para  $\alpha = 1$ ]. Sin embargo, en el caso general, un gas de Chaplygin generalizado se puede describir efectivamente por un campo escalar fantasma de



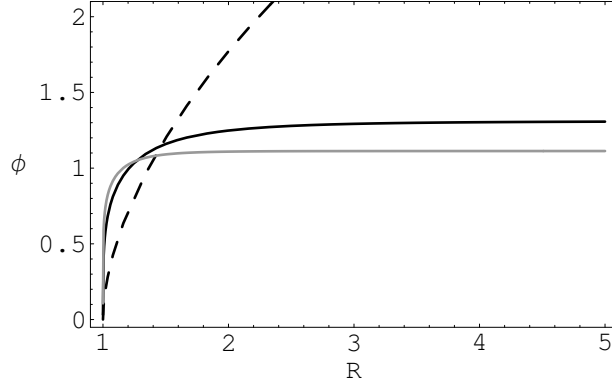


Figura 3.2: Esta figura muestra el comportamiento del campo escalar  $\phi$  como una función del factor de escala adimensional  $R/\bar{R}$  definido en la ecuación (3.18). La gráfica con línea discontinua corresponde a  $\alpha = -0,1$ , mientras que la gráfica con línea continua más oscura (más clara) corresponde a  $\alpha = 1$  ( $\alpha = 2$ ). En la figura, el campo escalar se ha redefinido como  $\sqrt{6\pi G}A_{\text{ch}}^{1/[2(1+\alpha)]}(\phi - \phi_0)$ .

Born-Infeld,  $\psi$ , sólo cuando su potencial depende explícitamente de  $\psi$ . De hecho, puede verse fácilmente que  $V$  varía con el factor de escala como

$$V(R) = \sqrt{A_{\text{ch}}} \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{1-\alpha}{2(1+\alpha)}}. \quad (3.21)$$

El potencial  $V$  se aproxima a un valor contante para valores grandes del factor de escala (estamos considerando  $-1 < \alpha$  y  $B < 0$ ). Además, su comportamiento cerca del valor mínimo del factor de escala,  $\bar{R}$  (para  $K = 0, -1$ ), depende mucho del valor específico del parámetro  $\alpha$ : para  $|\alpha| < 1$  el potencial se anula cerca de  $\bar{R}$ , pero para  $1 < |\alpha|$  el potencial va a infinito [véase la figura 3.3]. La principal diferencia entre los comportamientos de los campos escalares  $\psi$  y  $\phi$  es que  $\psi$  siempre alcanza valores muy grandes cerca de  $\bar{R}$ , mientras que esto no es necesariamente cierto para  $\phi$ . Además, se puede ver que para un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con secciones espaciales planas, el campo escalar  $\psi$  se expresa en función del factor de escala como [28]

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 = \frac{A_{\text{ch}}^{-\frac{1}{2(1+\alpha)}}}{\sqrt{6\pi G\alpha}} \left[ 1 - \left( \frac{\bar{R}}{R} \right)^{3(1+\alpha)} \right]^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} \\ &\times {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}; \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} + 1; 1 - \left( \frac{\bar{R}}{R} \right)^{3(1+\alpha)} \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

cuando  $\alpha$  es positivo. En la ecuación anterior  $\psi_0$  es una constante que corresponde al valor que toma  $\psi$  en  $R = \bar{R}$ . Se puede ver que  $\psi$  es finito para cualquier valor del factor de escala [véase el apéndice A]. Por otro lado, para  $-1 < \alpha < 0$ , el campo escalar  $\psi$  depende del factor de escala  $R$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \psi - \psi_\infty &= \frac{A_{\text{ch}}^{-\frac{1}{2(1+\alpha)}}}{\sqrt{6\pi G}(1+\alpha)} \left(\frac{\bar{R}}{R}\right)^{\frac{3(1+\alpha)}{2}} \\ &\times {}_2F_1\left(\frac{2+\alpha}{2(1+\alpha)}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \left(\frac{\bar{R}}{R}\right)^{3(1+\alpha)}\right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde  $\psi_\infty$  es el valor que alcanza  $\psi$  para factores de escala muy grandes. En este caso, el campo escalar  $\psi$  está bien definido para cualquier valor de  $R$ , excepto en  $R = \bar{R}$ , donde diverge.

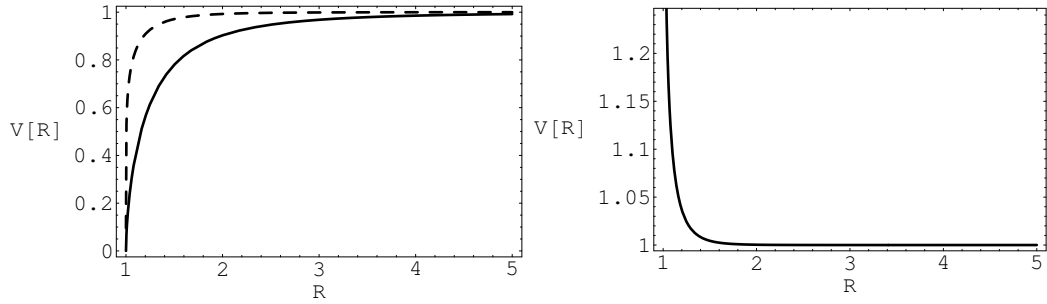


Figura 3.3: Estas figuras muestran el comportamiento de  $V(R)$  definido en la ecuación (3.21) como una función del factor de escala. La figura de la izquierda corresponde al valor  $\alpha = -0,1$  (línea continua) y  $\alpha = 1/2$  (línea discontinua). La figura de la derecha corresponde a  $\alpha = 2$ . El potencial  $V(R)$  se ha redefinido como  $A_{\text{ch}}^{-1/(1+\alpha)}V(R)$  y el factor de escala como  $R/\bar{R}$ .

Finalmente, analizaremos el comportamiento de un campo escalar mínimamente acoplado fantasma,  $\chi$ , que puede imitar el comportamiento de un gas de Chaplygin (para  $B$  negativo y  $-1 < \alpha$ ). En este caso, la densidad de energía  $\rho_\chi$  y la presión  $P_\chi$  del campo escalar homogéneo  $\chi$  son

$$\rho_\chi = -\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \tilde{V}(\chi), \quad P_\chi = -\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - \tilde{V}(\chi). \quad (3.24)$$

Si el campo escalar  $\chi$  simula un gas de Chaplygin generalizado fantasma, el potencial  $\tilde{V}$  depende del factor de escala como

$$\tilde{V}(R) = \frac{1}{2} \left[ A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right]^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left[ 2A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right]. \quad (3.25)$$

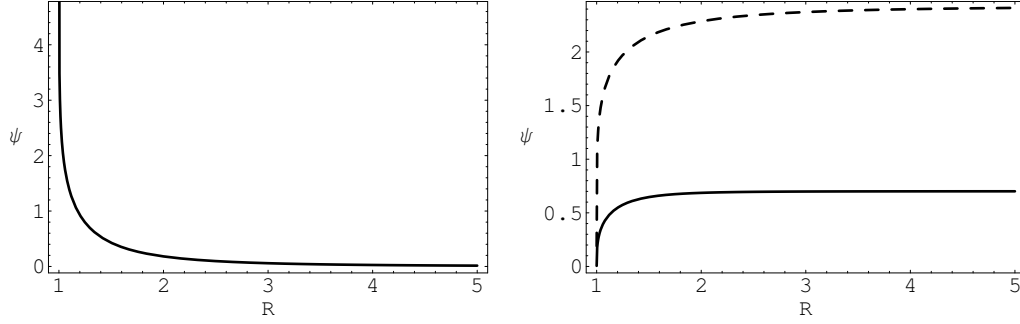


Figura 3.4: Estas figuras muestran el comportamiento de  $\psi$  definido en las ecuaciones (3.22) y (3.23) como una función del factor de escala para un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con secciones espaciales planas. La figura de la izquierda corresponde a  $\alpha = -0,1$ . La figura de la derecha corresponde a  $\alpha = 0,5$  (línea discontinua) y  $\alpha = 2$  (línea continua). En el dibujo de la izquierda, el campo escalar  $\psi$  se ha redefinido como  $\sqrt{6\pi G A_{\text{ch}}^{1/[2(1+\alpha)]}}(\psi - \psi_0)$ . En la gráfica de la derecha  $\psi$  se ha redefinido como  $\sqrt{6\pi G A_{\text{ch}}^{1/[2(1+\alpha)]}}(\psi - \psi_\infty)$ . En ambas figuras el factor de escala se ha dividido por  $\bar{R}$ .

Como se puede ver,  $\tilde{V}(R)$  tiende a una constante cuando  $R$  va a infinito. Esto no es sorprendente ya que hemos mencionado que un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker lleno de un gas de Chaplygin generalizado es asintóticamente de Sitter. Para el campo escalar,  $\chi$ , esto se traduce en que  $\tilde{V}(R)$  tiende a una constante no nula y que  $\dot{\chi}$  se anula para factores de escala muy grandes. Además,  $\tilde{V}(R)$  es finito cuando  $R$  tiende a  $\bar{R}$  (para  $K = 0, -1$ ) siempre que  $-1 < \alpha < 0$ . Sin embargo, para valores positivos de  $\alpha$ , el potencial  $\tilde{V}$  diverge cerca de  $\bar{R}$ . Más aún, si el espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker es espacialmente plano,  $\chi$  está bien definida para cualquier valor de  $R$ . De hecho, su evolución puede describirse en términos del factor de escala como

$$\chi - \chi_0 = \frac{1}{(1 + \alpha)\sqrt{24\pi G}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsen \left[ 2 \left( \frac{\bar{R}}{R} \right)^{3(1+\alpha)} - 1 \right] \right\}, \quad (3.26)$$

donde  $\chi_0$  es una constante de integración. Por otro parte, el potencial  $\tilde{V}$  varía con  $\chi$  como

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{2} \left( \frac{A_{\text{ch}}}{2} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \frac{3 - \cos [(1 + \alpha)\sqrt{24\pi G}(\chi - \chi_0)]}{\{1 - \cos [(1 + \alpha)\sqrt{24\pi G}(\chi - \chi_0)]\}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}. \quad (3.27)$$

El comportamiento del potencial  $\tilde{V}(\chi)$  depende fuertemente del valor del parámetro  $\alpha$  [véase la figura 3.6]. Para  $-1 < \alpha < 0$  el campo escalar crece con el poten-

cial. Sin embargo, para valores positivos de  $\alpha$ , el campo escalar  $\chi$  decrece con el potencial, en contraste con el resultado obtenido en la referencia [87, 143]. En el primer caso, el campo escalar comienza con una velocidad nula ( $\dot{\chi} = 0$ ) aumentando el potencial. Su velocidad continúa creciendo hasta que alcanza un valor máximo y entonces comienza a decrecer, anulándose para valores muy grandes del factor de escala [véase la figura 3.7]. En el segundo caso,  $\chi$  comienza con una velocidad infinita disminuyendo el potencial. Su velocidad disminuye progresivamente, hasta anularse cuando el factor de escala se hace infinito [véase la figura 3.7].

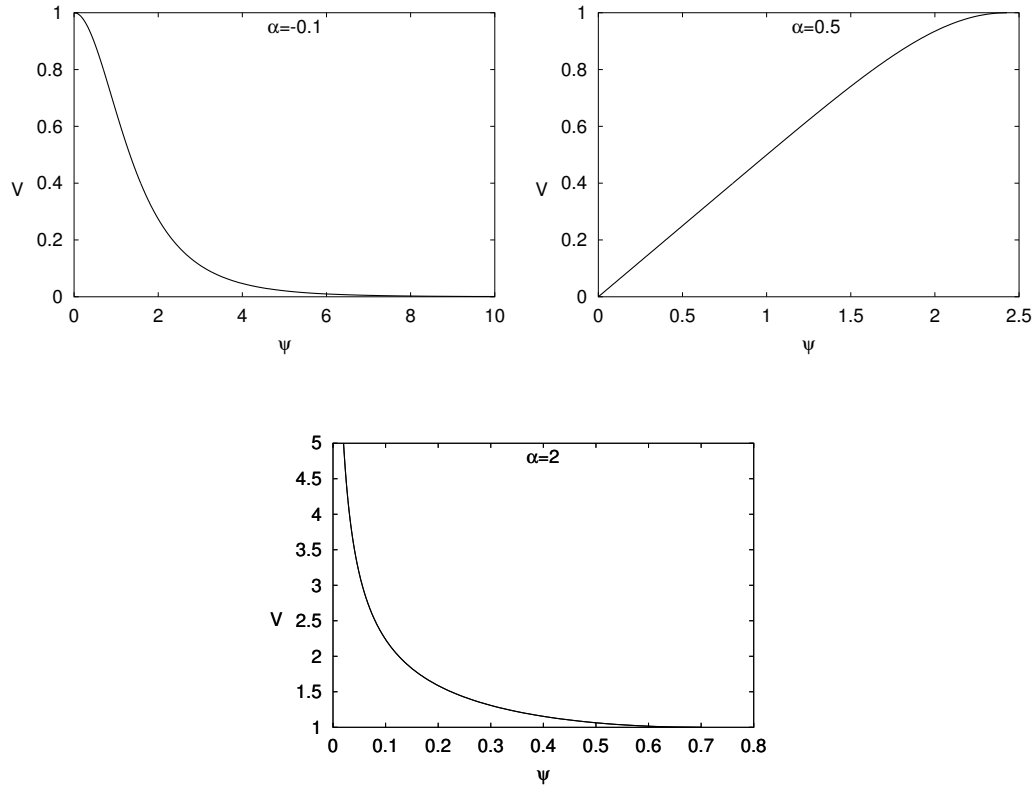


Figura 3.5: Estas figuras muestran el comportamiento de  $V$  como una función del campo escalar  $\psi$  [véase las ecuaciones (3.21), (3.22) y (3.23)] para un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con secciones espaciales planas. Las figuras comenzando por la izquierda corresponden a  $\alpha = -0,1$ ,  $\alpha = 0,5$  y  $\alpha = 2$ , respectivamente. El potencial  $V$  ha sido redefinido como  $A_{\text{ch}}^{-1/(1+\alpha)}V$ . En la gráfica de la izquierda se ha redefinido  $\psi$  como  $\sqrt{6\pi G}A_{\text{ch}}^{1/[2(1+\alpha)]}(\psi - \psi_{\infty})$ . En las otras figuras, el campo escalar  $\psi$  se ha redefinido como  $\sqrt{6\pi G}A_{\text{ch}}^{1/[2(1+\alpha)]}(\psi - \psi_0)$ .

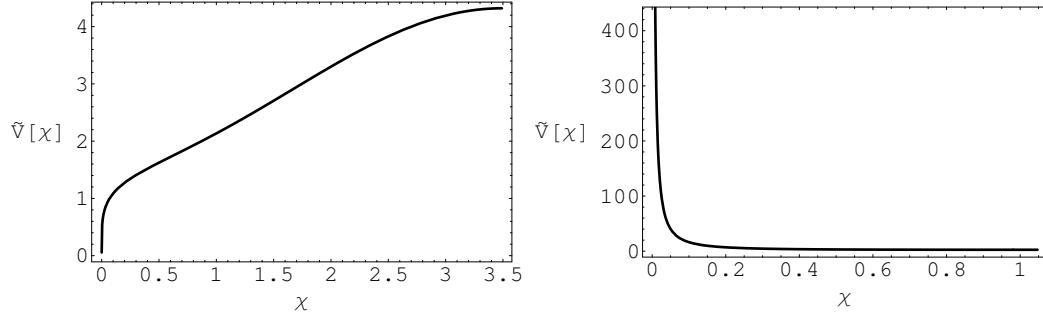


Figura 3.6: Estas figuras muestran el comportamiento de  $\tilde{V}(\chi)$  definido en la ecuación (3.27) como una función del campo escalar mínimamente acoplado  $\chi$  para un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con secciones espaciales planas. La figura de la izquierda corresponde a  $\alpha = -0,1$  y la de la derecha a  $\alpha = 2$ . En las gráficas, el campo escalar  $\chi$  se ha redefinido como  $\sqrt{24\pi G}(\chi - \chi_0)$  y el potencial como  $2(2/A_{\text{ch}})^{1/(1+\alpha)}\tilde{V}(\chi)$ . Como se puede ver, el comportamiento de  $\tilde{V}$  depende del valor elegido para  $\alpha$ . Para valores negativos de  $\alpha$ , el campo escalar crece con el potencial. Sin embargo, para valores positivos de  $\alpha$ , el campo escalar  $\chi$  disminuye con el potencial.

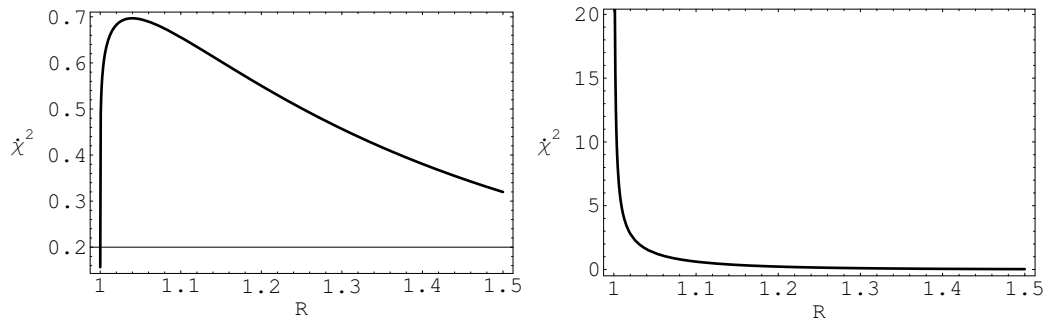


Figura 3.7: Se muestra el comportamiento del cuadrado de la velocidad del campo escalar  $\dot{\chi}^2$  como una función de  $R/\bar{R}$ . La figura de la izquierda corresponde a  $\alpha = -0,1$ , mientras que la de la derecha se refiere a  $\alpha = 2$ .  $\dot{\chi}^2$  se ha redefinido como  $A_{\text{ch}}^{-1/(1+\alpha)}\dot{\chi}^2$ .

### 3.4. Un modelo fenomenológicamente viable

Para estudiar la posibilidad de aparición de un big rip (en el futuro del universo) causado por la energía fantasma es una buena aproximación considerar que el contenido energético del universo viene dado principalmente por la energía fantasma a tiempos muy tardíos (factores de escala grandes). Sin embargo, cualquier modelo cosmológico viable que pueda describir la aceleración actual del universo debería tener en cuenta los otros contenidos materiales del universo, en particular materia oscura y radiación. La ecuación de Friedmann en este caso viene dada en la ecuación (3.5). Consideraremos que la materia oscura está descrita por un gas de Chaplygin generalizado con  $B < 0$  y  $-1 < \alpha$  [véase la ecuación (3.2)] y la componente de materia oscura como un fluido de polvo. La ecuación de Friedmann para secciones espaciales planas se puede reescribir como

$$H^2 = H_i^2 \left[ \frac{\rho_{\text{DE}}}{\rho_{c,i}} + \Omega_{\text{DM}} \left( \frac{R_i}{R} \right)^3 + \Omega_{\text{R}} \left( \frac{R_i}{R} \right)^4 \right]. \quad (3.28)$$

En la expresión anterior,  $H_i, R_i, \rho_{c,i}$  son los valores actuales del parámetro de Hubble, el factor de escala y la densidad crítica de energía. Por otro lado,  $\Omega_{\text{DM}}$  y  $\Omega_{\text{R}}$  son la densidad de los parámetros para la materia oscura y la radiación. El modelo puede describir la aceleración actual del Universo siempre que  $\rho_{\text{DE}}/\rho_{c,i} \simeq 0,7$ ,  $\Omega_{\text{DM}} \simeq 0,3$  y  $\Omega_{\text{R}} \simeq 0$ . Por otro lado, en la era dominada por la radiación ( $T = 1$  MeV) la densidad de energía tiene que estar dominada por  $\rho_{\text{R}}$  (para que tenga lugar una nucleosíntesis satisfactoria). Considerando que el factor de escala actual es igual a la unidad, el factor de escala en la era dominada por la radiación es igual a  $2,4 \times 10^{-10}$ . Nuestro modelo puede describir un modelo cosmológicamente viable satisfaciendo todos estos requisitos para valores diferentes de  $\alpha$  [véase la figura 3.8], aunque existe un ajuste fino en los parámetros  $A_{\text{ch}}$  y  $B$ .

### 3.5. Resumen y comentarios

En este capítulo se ha visto que si modelamos la energía oscura como un gas de Chaplygin generalizado fantasma, es decir,  $P = -A_{\text{ch}}/\rho^\alpha$ , este gas se comporta como energía fantasma siempre que el parámetro  $B$  sea negativo [véase la ecuación (3.3)]. Además, la densidad de energía del gas aumenta con la expansión del universo, anulándose para un factor de escala mínimo y aproximándose a un valor constante a tiempos muy tardíos (para  $-1 < \alpha$ ). Por consiguiente, se puede ver que en este caso el universo nunca alcanza un big rip. De hecho, es asintóticamente de Sitter.

El modelo que involucra un gas de Chaplygin generalizado fantasma puede describir la aceleración actual del Universo [véase la sección 3.4], donde la densi-

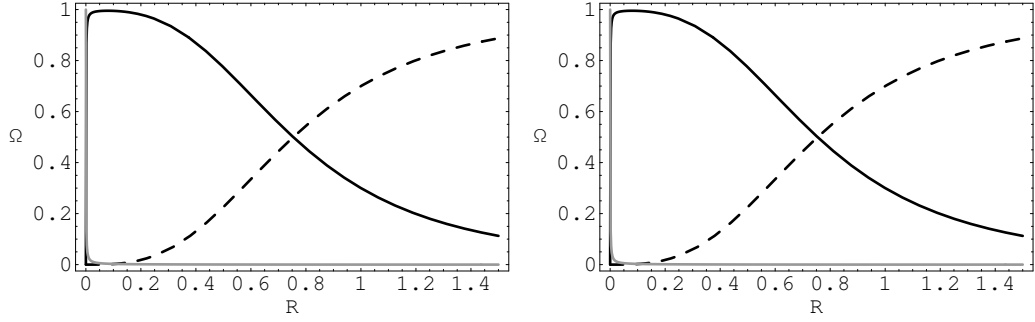


Figura 3.8: Estas figuras muestran el comportamiento de  $\Omega_{DE}$ ,  $\Omega_{DM}$  y  $\Omega_R$  como funciones del factor de escala desde la época de la nucleosíntesis; es decir,  $\rho_R = 1MeV^4$ . La gráfica con línea continua más clara corresponde a  $\Omega_R$ . La que tiene la línea continua más oscura corresponde a  $\Omega_{DM}$ . Finalmente, la de la línea discontinua corresponde a  $\Omega_{DE}$ . Por otro lado, en la figura de la izquierda, se han elegido  $\alpha = -0,1$ ,  $A_{ch}^{1/(1+\alpha)} \simeq 2,8 \times 10^{-11} eV^4$  y  $|B|^{1/(1+\alpha)} \simeq 3,8 \times 10^{-40} eV^4$ . En cambio, en la figura de la derecha, se han tomado  $\alpha = -0,9$ ,  $A_{ch}^{1/(1+\alpha)} \simeq 2,8 \times 10^{-10} eV^4$  y  $|B|^{1/(1+\alpha)} \simeq 1,4 \times 10^{-41} eV^4$ . Como puede observarse el comportamiento es muy parecido para estas dos elecciones de parámetros.

dad de energía del gas corresponde aproximadamente a las dos terceras partes de la densidad total de energía del universo. Sin embargo, es necesario un ajuste fino de los parámetros  $A_{ch}$  y  $B$  relacionados con la densidad de energía del gas.

Se ha estudiado también cómo el gas de Chaplygin generalizado fantasma puede aparecer de una manera natural en el contexto de teorías de Born-Infeld fantasmas generalizadas, donde el término de la energía cinética para el campo escalar es negativo. Además, hemos analizado diferentes campos escalares fantasmas que pueden imitar el comportamiento de este gas. Esto se ha llevado a cabo en el contexto de campos escalares de Born-Infeld y de un campo escalar mínimamente acoplado. Aunque la dinámica de cada uno de estos campos escalares puede ser bastante diferente, dan el mismo comportamiento para el factor de escala, evitando que el universo alcance la singularidad del big rip en el futuro.

Finalmente, nos gustaría hacer hincapié en el hecho de que un modelo de energía fantasma no implica necesariamente la ocurrencia de un big rip en el futuro del universo, como se ha visto usando un gas de Chaplygin generalizado fantasma, incluso sin imponer ninguna restricción en la velocidad del sonido [2, 4, 32, 33, 42, 43, 46, 59, 62, 70, 88, 102, 103, 116, 120, 125–127, 129, 149]. Además, la singularidad del big rip no está necesariamente relacionada con el contenido material fantasma, como ha sido puntualizado recientemente en [15]. Aunque realmente ahí la singularidad del big rip ocurre en un tiempo cósmico, factor de escala, densidad de energía y constante de Hubble finitos; y la singularidad está asociada con la divergencia de la presión.



## Capítulo 4

# Modelo generalizado de Chaplygin: ¿Futuro cósmico acronal?

En este capítulo llevaremos a cabo un estudio de la acreción de energía oscura en agujeros de gusano, modelizada tanto por energía fantasma convencional como por un gas de Chaplygin generalizado con ecuación de estado  $P = -A_{\text{ch}}/\rho^\alpha$ . Obtendremos que, cuando se viola la condición de energía dominante, el tamaño del agujero de gusano crece con el factor de escala hasta un valor constante (en el caso del gas de Chaplygin generalizado) o infinito (en el caso de energía fantasma tipo quintaesencia). En el régimen donde se satisface la condición de energía dominante, nuestro modelo predice una disminución progresiva del tamaño del agujero de gusano según va acretando gas de Chaplygin generalizado. La conclusión principal es que se evita el big trip en una amplia región de los parámetros físicos del modelo usado.

### 4.1. Introducción

Como ya hemos mencionado, una de las propiedades más peculiares de los modelos cosmológicos de energía fantasma es la posibilidad de que el universo alcance su final en un tiempo finito del futuro, un proceso también denominado big rip [37, 73]. En estos modelos el factor de escala tiende a infinito en un tiempo finito porque la aceleración cósmica es incluso mayor que la inducida por una constante cosmológica positiva. Es conveniente resaltar que la condición  $P + \rho < 0$  no es suficiente para que tenga lugar el big rip; es decir, si se considera un universo lleno con un gas de Chaplygin generalizado fantasma, se puede evitar el big rip [28, 70] (véase también [119, 165] o el Capítulo 3). Otra propiedad particular de la energía fantasma es que puede formar la sustancia exótica que constituyen los agujeros de gusano [114, 128], abriendo la posibilidad de que ocurra un big trip

(como veremos en este capítulo) [71, 74, 75]: si existiera un agujero de gusano en un universo lleno de energía fantasma el tamaño de este agujero de gusano crecería de tal forma que el agujero de gusano podría engullir al universo entero antes de que alcanzara la singularidad del big rip, debido al proceso de acreción de energía fantasma en el agujero de gusano. Este fenómeno sólo puede ocurrir para un observador asintótico.

¿Un universo lleno de gas de Chaplygin generalizado fantasma, el cual evita la singularidad del big rip, escaparía también al big trip ? En este capítulo encontraremos que para un rango amplio de los parámetros de un gas de Chaplygin no se predice ningún big trip, aunque todavía existe una posibilidad en el espacio de parámetros físicamente permitidos que no excluyen la posibilidad de que se produzca una interrupción de la evolución causal. De este modo, se ha visto que un gas de Chaplygin generalizado posee diferentes propiedades potenciales muy interesantes, ya que evita el big rip [28, 70], se puede usar como material de construcción de agujeros de gusano [115], previene que el universo sea engullido por un agujero negro [101] como se verá en el capítulo 6, y, finalmente, podría esquivar el problema del big trip.

## 4.2. Agujeros de gusano clásicamente estables

Un agujero de gusano corresponde a un túnel estable y atravesable en el espacio-tiempo descrito por una solución a las ecuaciones de Einstein para un contenido material con simetría esférica cuya energía ha sido denominada exótica; es decir, que viola la condición de energía dominante, tal y como ocurre con la energía fantasma. Esta última propiedad es clásica para evitar el estrangulamiento del túnel por su garganta, ya que una distribución esférica alrededor de la garganta de materia exótica genera una presión negativa suficientemente grande como para estabilizar el agujero de gusano. Túneles formados con materia ordinaria, tales como los denominados agujeros de gusano de Schwarzschild o puentes de Rosen-Einstein [55] son inestables y se estrangulan por su garganta una vez formados para dar lugar a un par de agujero negro-agujero blanco [71, 92].

Aunque los agujeros de gusano cuya garganta esférica esté revestida con materia exótica son estables clásicamente, no ocurre lo mismo cuando se considera su existencia en una teoría semiclásica. En efecto, la presencia de un horizonte de Cauchy<sup>1</sup> (también llamado cronológico) induce una polarización del vacío que finalmente hace divergente el tensor energía-impulso renormalizado sobre dicho horizonte. Como el espacio de Misner (prototipo de patologías en la causalidad), los agujeros de gusano satisfacen la denominada simetría de Misner de acuerdo

---

<sup>1</sup>El horizonte de Cauchy o cronológico describe la superficie a partir de la cual el agujero de gusano entra en una región acronal donde proliferan las curvas cerradas temporales.

con la cual se establece una invarianza de la métrica respecto de ciertas propiedades periódicas del espacio-tiempo. Al igual que los agujeros de gusano, todas las soluciones que poseen regiones acronales con curvas cerradas temporales satisfacen la simetría de Misner y dan lugar a una creación catastrófica de partículas de vacío que producen divergencias sobre el límite de Cauchy. La generalización de este hecho condujo a Hawking a formular la llamada *conjetura de protección cronológica* [91], de acuerdo con la cual los efectos cuánticos protegen la causalidad al hacer inestable cualquier solución que posea curvas cerradas temporales. Es posible comprobar, sin embargo, que la conjetura de protección cronológica puede violarse y, de hecho, se han encontrado algunos ejemplos donde así ocurre. Entre ellos se encuentran, precisamente, los agujeros de gusano de Morris-Thorne, que sufren un proceso de big trip [64]. En efecto, la cinemática asociada al fenómeno big trip es tan extrema que confina las partículas creadas en la polarización del vacío en regiones que no contienen al horizonte cronológico.

Vemos así que los procesos de acreción de energía fantasma conducen, en general, a una estabilización de los agujeros de gusano, incluso desde el punto de vista mecano-cuántico.

### 4.3. Acreción de energía oscura en agujeros de gusano

Comencemos revisando el formalismo de acreción, estudiado primeramente por Babichev, Dokuchaev y Eroshenko [9, 10] para el caso de agujeros negros, (véase también [76]), generalizándolo al caso de agujeros de gusano. En este capítulo usaremos unidades naturales, por lo que  $G = c = 1$ . La métrica espacio-temporal estática de Morris-Thorne de un agujero de gusano viene dada por [121]

$$ds^2 = e^{\Phi(r)} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{K(r)}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

donde  $\Phi(r)$  es la función shift y  $K(r)$  es la función forma [121, 122]. Modelaremos la energía oscura en el agujero de gusano como un fluido perfecto con presión negativa y una ecuación de estado arbitraria  $P(\rho)$ , cuyo tensor energía-impulso es

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

donde  $P$  es la presión,  $\rho$  la densidad de energía, y  $u^\mu = dx^\mu/ds$  es la 4-velocidad con  $u^\mu u_\mu = 1$ . La componente cero (temporal) de la ley de conservación del tensor energía-impulso  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  se puede expresar como

$$0 = \frac{d}{dr} \left[ e^{\Phi(r)} (P + \rho) \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \right] +$$

$$+ e^{\Phi(r)} (P + \rho) \left[ \Phi'(r) + \frac{K'(r)r - K(r)}{2r^2 \left(1 - \frac{K(r)}{r}\right)} + \frac{2}{r} \right] \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds}. \quad (4.3)$$

La integración de la ecuación (4.3) es

$$uM^{-2}r^2 \left(1 - \frac{K(r)}{r}\right)^{-1} (P + \rho) \sqrt{u^2 + \frac{K(r)}{r} - 1} = C, \quad (4.4)$$

donde  $u = dr/ds$ , y  $M$  es la masa exótica del agujero de gusano que, siguiendo el procedimiento de la referencia [9, 10], ha sido introducida para conseguir que la constante de integración  $C$  tenga las dimensiones de una densidad de energía (recuérdese que estamos usando unidades naturales), y, sin pérdida de generalidad para nuestros propósitos actuales, vamos a considerar el caso donde  $\Phi' = 0$ .

Se puede derivar otra integral del movimiento usando la proyección de la ley de conservación del tensor energía-impulso a lo largo de la cuatro-velocidad, es decir, la ecuación de flujo  $u_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ . Para el caso de un fluido perfecto esta ecuación se reduce a

$$u^\mu \rho_{;\mu} + (P + \rho) u^\mu_{;\mu} = 0. \quad (4.5)$$

La integración de la ecuación (4.5) nos proporciona la segunda integral del movimiento

$$M^{-2}r^2 u \left(1 - \frac{K(r)}{r}\right)^{-1/2} e^{\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho}{P+\rho}} = -A, \quad (4.6)$$

donde  $u < 0$  en el caso de un flujo de fluido dirigido hacia el interior del agujero de gusano, y  $A$  es una constante positiva adimensional. La ecuación (4.6) nos da información sobre el flujo inducido en el proceso de acreción. De las ecuaciones (4.4) y (4.6), se obtiene fácilmente

$$(P + \rho) \left(1 - \frac{K(r)}{r}\right)^{-1/2} \sqrt{u^2 + \frac{K(r)}{r} - 1} e^{-\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho}{P+\rho}} = C_2, \quad (4.7)$$

donde  $C_2 = -C/A = \tilde{A} [P(\rho_\infty) + \rho_\infty]$ , siendo  $\tilde{A}$  una constante positiva.

La tasa de variación de la masa exótica de un agujero de gusano debido a la acreción de energía oscura se puede obtener integrando sobre un elemento de área la densidad de momento  $T_0^r$ ; esto es [109]

$$\dot{M} = - \int T_0^r dS, \quad (4.8)$$

con  $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ . Usando las ecuaciones (4.2), (4.6) y (4.7), la ecuación (4.8) se puede reescribir como [74]

$$\dot{M} = -4\pi DM^2 \sqrt{1 - \frac{K(r)}{r}} [P(\rho_\infty) + \rho_\infty], \quad (4.9)$$

donde la constante  $D = A\tilde{A} > 0$ . Para el régimen relevante asintótico  $r \rightarrow \infty$  donde el big trip ocurre, la tasa de variación  $\dot{M}$  se reduce a

$$\dot{M} = -4\pi M^2 D (P + \rho). \quad (4.10)$$

Entonces vemos que la variación para la masa exótica de un agujero de gusano debida a la acreción de energía oscura llega a ser asintóticamente opuesta exactamente al caso similar de la variación de la masa de un agujero negro de Schwarzschild [9, 10].

Para los modelos de quintaesencia actuales, el uso de un factor de escala  $R = R_0 (1 + \sqrt{6\pi\rho_0}(1+w)(t-t_0))^{2/[3(1+w)]}$  con  $w < -1$  (que se corresponde con la solución de la ecuación general  $-3H(1+w) = 2\dot{H}/H$ , con  $\dot{\ } = d/dt$  y  $H = \dot{R}/R$  para  $w$  constante [12, 16, 35, 36, 67, 95–97, 162, 164]), nos lleva a un comportamiento singular para el tamaño del agujero de gusano antes de alcanzar el big rip, esto es, el big trip. Es decir, en este caso se obtiene que la evolución de la masa exótica del agujero de gusano viene dada por [74],

$$M = \frac{M_0}{1 - DM_0 \sqrt{\frac{8\pi\rho_0}{3}} [1 + \sqrt{6\pi\rho_0}(1+w)(t-t_0)]^{-1}}, \quad (4.11)$$

donde  $M_0$  es la masa exótica inicial del agujero de gusano. Este resultado implica que la masa exótica  $M$  diverge en un tiempo (en el caso de energía fantasma, es decir,  $w < -1$ )

$$t_{\text{trip}} = t_0 + \frac{M_0 D \sqrt{\frac{8\pi\rho_0}{3}} - 1}{(1+w) \sqrt{6\pi\rho_0}} < t_{\infty 0}, \quad (4.12)$$

donde  $t_{\infty 0}$  es el tiempo de ocurrencia del big rip, es decir  $t_{\infty 0} = t_0 - \frac{1}{\sqrt{6\pi\rho_0}(1+w)}$ .

Así  $t_{\text{trip}}$  sucede antes que el big rip. Es decir, el universo sería tragado por el agujero de gusano antes del big rip. Este nuevo tipo de singularidad se conoce como el big trip, que será estudiada en más profundidad en el capítulo siguiente.

## 4.4. Agujeros de gusano en un gas de Chaplygin generalizado

Ahora derivaremos las expresiones para la variación  $\dot{M}$  en el caso de un gas de Chaplygin generalizado. Como hemos visto en el capítulo anterior, se puede

describir como un fluido perfecto con la ecuación de estado [20–24, 26, 27, 78, 79, 104]

$$P = -A_{ch}/\rho^\alpha, \quad (4.13)$$

donde  $A_{ch}$  es una constante positiva y  $\alpha > -1$  un parámetro. En el caso particular  $\alpha = -1$  la ecuación de estado (4.13) corresponde a un gas de Chaplygin. La conservación del tensor energía-impulso implica

$$\rho = \left( A_{ch} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (4.14)$$

con  $B \equiv (\rho_0^{\alpha+1} - A_{ch}) R_0^{3(\alpha+1)}$ ,  $R \equiv R(t)$  es el factor de escala y el subíndice “0” indica el valor inicial. Ahora, de la ecuación de Friedmann podíamos obtener

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} R \left( A_{ch} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right)^{1/[2(1+\alpha)]}. \quad (4.15)$$

De las ecuaciones (4.10)-(4.15) se llega a [100]

$$M = \frac{M_0}{1 - DM_0 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left[ \rho^{1/2} - \rho_0^{1/2} \right]}. \quad (4.16)$$

Para el caso en el que se verifica la condición de energía dominante, es decir,  $B > 0$ , se obtiene que  $M$  disminuye con el tiempo y tiende a un valor constante. Por otro lado,  $M$  parece disminuir más rápidamente según se hace el parámetro  $\alpha$  más pequeño. Si suponemos que la condición de energía dominante es violada, esto es,  $B < 0$ , como se supone que requiere la energía fantasma [28, 70], se tiene que  $M$  aumenta con el tiempo, tendiendo a un valor máximo constante no nulo. Haciendo  $|B|$  o  $\alpha$  más pequeño, la evolución es más rápida.

Cuando el tiempo tiende a infinito, la masa exótica del agujero de gusano se aproxima a

$$M = \frac{M_0}{1 - DM_0 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left( A_{ch}^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} - \rho_0^{1/2} \right)}, \quad (4.17)$$

que generalmente será un valor finito tanto para  $B > 0$  como para  $B < 0$ . Así, a primera vista, se podría pensar que, contrariamente a lo que ocurre en los modelos de quintaesencia fantasma, la presencia de un gas de Chaplygin generalizado elimina la aparición del fenómeno del big trip. Sin embargo, tal conclusión no se puede garantizar, ya que el tamaño de la garganta del agujero de gusano podría exceder el tamaño del universo durante su evolución previa. Nótese, por ejemplo, que en los agujeros de gusano sin fuerzas de marea se podría considerar que la materia exótica está confinada en una región arbitrariamente pequeña alrededor de la

garganta del agujero de gusano [121, 122] y, en este caso, el radio de la garganta del agujero sería aproximadamente proporcional a su masa. Es decir, la cuestión de si un agujero de gusano podría crecer suficientemente rápido eventualmente o de si no engulle al universo durante su evolución clásica hasta su estado estacionario está todavía abierta. Este problema se tendría que resolver antes de llegar a una conclusión sobre la posibilidad de existencia de un big trip en estos modelos. En realidad, para evitar el big trip, se necesitan las dos condiciones siguientes: (i)  $R \neq M$  durante toda la evolución, y (ii) que  $N(R) = \dot{R}/\dot{M}$  sea siempre una función creciente durante la evolución. La primera de estas condiciones implica que la función

$$f(M) = M - MM_0 D \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left[ \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{M^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} - \rho_0^{1/2} \right] - M_0 \quad (4.18)$$

no se anule nunca. Analizaremos esta cuestión teniendo en cuenta los ceros de la segunda derivada

$$f''(M) \equiv \frac{d^2 f(M)}{dM^2} = \sqrt{6\pi} DB \frac{M_0}{M^{3(1+\alpha)+1}} \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{M^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{-2\alpha-1}{2(1+\alpha)}} \times \left[ 1 - 3(1+\alpha) + \frac{3B(2\alpha+1)}{2M^{3(1+\alpha)}} \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{M^{3(1+\alpha)}} \right)^{-1} \right]. \quad (4.19)$$

Ahora, teniendo en cuenta que físicamente,

$$M > M_0 > \left( -\frac{B}{A_{\text{ch}}} \right)^{\frac{1}{3(1+\alpha)}}, \quad (4.20)$$

cuya segunda desigualdad significa que, durante su evolución, el radio del universo debe ser mayor que su tamaño inicial, la ecuación (4.19) se puede reducir a calcular los ceros de

$$1 - 3(1+\alpha) + \frac{3B(2\alpha+1)}{2M^{3(1+\alpha)}} \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{M^{3(1+\alpha)}} \right)^{-1} = 0, \quad (4.21)$$

cuya solución es  $M^{3(1+\alpha)} = -B/[2(2+3\alpha)A_{\text{ch}}]$ . Sin embargo, de la condición (4.20) tenemos que  $0 < 2(2+3\alpha) < 1$ , lo que implica que podrían existir a lo sumo tres puntos de corte, ya que este intervalo está permitido por el rango de valores de  $\alpha$  para un modelo de gas de Chaplygin generalizado, es decir,  $\alpha > -1$ . Para valores de  $\alpha$  fuera del intervalo  $0 < 2(2+3\alpha) < 1$ , pero todavía dentro del rango que Chaplygin permite, uno podría esperar como mucho dos puntos. De este análisis se obtiene que, en principio, el big trip podría ocurrir.

En lo que se refiere a la condición (ii), se obtiene de las ecuaciones (4.10) y (4.15) que

$$N(R) = -\frac{1}{BM_0^2 D \sqrt{6\pi}} R^{3(1+\alpha)+1} \rho^{\frac{2\alpha+1}{2}} \left\{ 1 - M_0 D \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left[ \rho^{\frac{1}{2}} - \rho_0^{1/2} \right] \right\}^2. \quad (4.22)$$

De la ecuación (4.22) se sigue que  $N(R_0) \geq 1$ , ya que el tamaño del agujero de gusano debe ser bastante más pequeño que el del universo inicialmente. Así, una función  $N(R)$  que sea siempre creciente implicaría que el factor de escala crece más rápido que  $M$ , lo que evitaría cualquier big trip. Diferenciando  $N(R)$  con respecto a  $R$  y teniendo en cuenta que  $B < 0$  para un gas de Chaplygin fantasma, se puede comprobar que  $N(R)/dR > 0$  en el caso general en que  $\alpha$  no tome valores suficientemente próximos a  $-1$ ; esto es, se sigue de la ecuación (4.17) que dentro del intervalo [100]

$$-1 < \alpha < \frac{\ln A_{\text{ch}}}{\ln \left( \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{M_0 D} + \rho_0^{1/2} \right)^2} - 1, \quad (4.23)$$

todavía podría ocurrir un big trip.

Por otro lado, aún queda por resolver lo que pasaría con el agujero de gusano crecido una vez que haya alcanzado su tamaño máximo final. Ya que el tamaño del agujero de gusano tiende a ser constante en la etapa final de su evolución y sería un objeto macroscópico, estaría sujeto a la protección cronológica [91]. De hecho, uno esperaría que las partículas creadas de la polarización del vacío se acumularan catastróficamente en el horizonte cronológico del agujero de gusano haciendo que el correspondiente tensor energía-impulso divergiera y, por lo tanto, el agujero de gusano tendría que desaparecer.

Sería interesante estudiar la región del espacio de parámetros ( $\alpha$ ,  $A_{\text{ch}}$ ,  $H_0$ ,  $\Omega_K$ ,  $\Omega_\phi$ ) permitida por las observaciones actuales para determinar si existe alguna posibilidad que permitiera un big trip. Pero todos los análisis disponibles [23, 25, 45, 166] están restringidos a regiones físicas donde no se viola la condición de energía dominante. Por lo tanto, la sección descrita por el intervalo implicado por la ecuación (4.23) estaría necesariamente fuera de las regiones analizadas. Se tendrían que extender los dominios investigados para incluir valores del parámetro  $A_{\text{ch}} > 1$  y así estudiar el espacio de parámetros relativo al big trip. En cualquier caso el rango de valores de  $\alpha$  compatibles con un big trip es tan extremadamente pequeño que la existencia de un fenómeno big trip en un modelo de gas de Chaplygin generalizado es muy improbable.



## 4.5. Resumen y comentarios

En este capítulo hemos revisado y estudiado la acreción de energía fantasma y de un gas de Chaplygin en un agujero de gusano. Primeramente se ha revisado el formalismo de acreción considerado originariamente por Babichev, Dokuchaev y Eroshenko [9, 10] para el caso de un agujero de gusano acretando energía fantasma [74]. Seguidamente se ha aplicado tal formalismo al modelo de un gas de Chaplygin generalizado. La evolución de la masa exótica con la acreción de energía oscura tipo Chaplygin se ha considerado en primer lugar cuando se satisface la condición de energía dominante. Se ha visto que en este caso la masa disminuye con el tiempo cósmico.

Si la acreción involucra energía fantasma Chaplygin, entonces  $M$  aumenta desde su valor inicial, tendiendo a alcanzar una meseta según el tiempo cósmico tiende a infinito. Se ha obtenido que no se predice ningún big trip para una región amplia de los parámetros del Chaplygin, contrariamente a lo que ocurre en modelos de energía oscura de quintaesencia y K-esencia. Sin embargo, siempre que el régimen Chaplygin tienda a ajustarse al régimen de quintaesencia, pero todavía presumiblemente dentro de la región de Chaplygin, no se excluye la posibilidad de un big trip en un tiempo finito futuro. Finalmente, también se argumenta que el destino final del agujero de gusano es el de ser desestabilizado por procesos de vacío cuántico. Para concluir, el gas de Chaplygin generalizado tiene muchas propiedades interesantes y podría evitar varias singularidades de las que aparecen en los modelos de quintaesencia usuales.

Tomar las propiedades anteriores como garantía de que el gas de Chaplygin es la componente de energía oscura más consistente es un tema que dependerá tanto de la consistencia intrínseca de los modelos como de los datos observacionales actuales y de aquellos que estén por venir en el futuro.

Antes de cerrar este capítulo, conviene mencionar un aspecto que pudiera ser problemático en lo dicho anteriormente respecto a los modelos que dan lugar a una singularidad tipo big rip en el futuro, aunque no en el caso del gas de Chaplygin generalizado. Puede comprobarse que a medida que el universo se acerca a la singularidad futura, su densidad de energía y curvatura tienden a valores cada vez mayores y, por lo tanto, muy cerca de dicha singularidad comenzarían a aparecer efectos cuánticos del espacio-tiempo que tendríamos que esperar que influyeran de manera decisiva en cualquier fenómeno que tuviera lugar muy cerca de dicha singularidad, a pesar de que no disponemos aún de una teoría cuántica de la gravedad. Aunque como veremos en el capítulo 6, esta cuestión va a incidir en el campo de la acreción de energía fantasma en agujeros negros, el fenómeno del big trip parece estar a salvo de dicha dificultad toda vez que, en general, el big trip debe ocurrir a un tiempo suficientemente anterior al big rip como para que los efectos de la gravedad cuántica estén claramente debilitados y la descripción

clásica considerada en la primera parte de este capítulo pueda ser tomada como una muy buena aproximación.

# Capítulo 5

## Inflación primordial fantasma

En este capítulo presentamos un modelo tentativo para la descripción de la inflación primordial usando un campo de quintaesencia tipo fantasma con ecuación de estado  $P = w\rho$  y  $w < -1$ . Dicho modelo heredará, por supuesto, las propiedades problemáticas que hemos señalado para la energía oscura y presenta, además, otro problema importante: ¿cómo se conecta la fase acelerada inflacionaria con la desacelerada posterior? Aunque de un carácter eminentemente especulativo, este capítulo presenta un mecanismo para resolver este problema, de manera que la anterior conexión se lleve a cabo de forma suave. Para ello recurrimos a un escenario tipo multiverso donde el universo primordial fantasma podría convertirse en una entidad que transfiriera todo su contenido a otro universo lleno de radiación en su futuro, a través de un agujero de gusano antes de alcanzarse el big rip. A esta transición la hemos denominado “big trip” y supondremos que tiene lugar con la ayuda de algún tipo de principio antrópico que, de alguna forma, selecciona a nuestro Universo como el destino final de la transición.

### 5.1. Introducción

La energía fantasma podría estar dominando el Universo actualmente. Como ya hemos comentado en capítulos anteriores, esta es una posibilidad que no está excluida por las observaciones actuales que determinan la ecuación universal de estado [4]. Si la energía fantasma dominara actualmente sobre las demás componentes cósmicas en el Universo, entonces estaríamos entrando en un periodo de inflación superacelerada que incluso sería más acelerado que el proceso de aceleración correspondiente a la existencia de una constante cosmológica positiva. Se podría así considerar que también la inflación primordial está producida por un campo fantasma. De hecho, Piao y Zhang ya han considerado [138] un escenario de universo temprano donde el mecanismo inflacionario viene inducido por

energía fantasma. La dificultad principal con este escenario es que en él, es difícil imaginarse cómo el universo puede salir suavemente del periodo inflacionario, ya que un universo fantasma inflacionario parece acabar inexorablemente en una singularidad catastrófica de tipo big rip. Sin embargo, parece haber una herramienta que nos podría ayudar a resolver tal dificultad. Está basada en los efectos bastante sorprendentes que la acreción de energía fantasma puede inducir en la evolución de agujeros de gusano lorentzianos [71].

Ya que la energía fantasma viola la condición de energía dominante, los agujeros de gusano pueden aparecer de manera natural [124, 159] en un universo dominado por energía fantasma [69]. De hecho, se podría pensar que si los agujeros de gusano de tamaño de Planck son estables cuanto-mecánicamente y su existencia estuviera también permitida en el plasma del espacio-tiempo primordial dominado por energía fantasma, entonces la garganta de los agujeros de gusano crecería rápidamente y llegaría a ser mayor incluso que el tamaño del universo inflante mismo, “explotando” antes de que se produjera el big rip [71]. El momento en el cual todos los agujeros de gusano, originalmente del tamaño de Planck, de la espuma cuántica espaciotemporal llegarían a adquirir un tamaño infinito simultáneamente es lo que hemos denominado el “Big Trip” (véase la figura 5.1), ya que un universo primordial suficientemente inflado estaría dentro de la garganta de los agujeros de gusano y podría, de este modo, convertirse en un “viajero temporal” que podría ser transferido instantáneamente hacia su pasado o su futuro. Las condiciones para el big trip no se dan solamente en el tiempo cuando el tamaño de la garganta de los agujeros de gusano “explota”, sino que se extiende a un tiempo anterior cuando el tamaño de la garganta del agujero de gusano llega a ser mayor que el tamaño del universo fantasma, todo a lo largo del intervalo de tiempo  $\Delta T_{nocronal}$  mostrado en la figura 5.1 .

## 5.2. Un modelo Multiverso

A continuación implementaremos la situación anterior usando un escenario de carácter eminentemente especulativo donde, describiremos un conjunto de universos cuánticos paralelos (que incluirían tanto al universo fantasma como a un universo lleno de radiación usual), discutiendo el mecanismo por el cual el universo fantasma podría salir de forma suave de la fase inflacionaria a través de una transición temporal desde el universo fantasma a un universo de Friedmann con radiación.

Consideremos una variedad espaciotemporal  $\mathcal{M}$  para un espacio de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker plano con métrica

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + R(t) d\Omega_3^2, \quad (5.1)$$

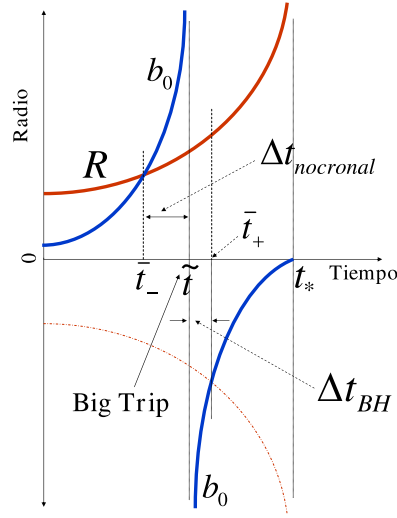


Figura 5.1: Evolución del radio de la garganta del agujero de gusano,  $b_0$ , inducida por la acreción de energía fantasma. En el tiempo  $t = \tilde{t}$ , la masa exótica negativa llega a hacerse infinita y entonces cambia de signo, convirtiéndose así el agujero de gusano en un puente de Einstein-Rosen cuya masa asociada disminuye hasta cero en el big rip con  $t = t_*$ . Durante el intervalo temporal  $\Delta t_{\text{nocronal}}$  existirá una disrupción de la evolución causal del universo completo. La evolución del universo fantasma en el tiempo  $t = \tilde{t}$  es completamente no causal y todas las clases de viajes temporales están permitidos. Por lo tanto el momento con  $t = \tilde{t}$  lo llamaremos aquí “Big Trip”.

donde  $N$  es la función lapso resultante de la foliación de la variedad  $\mathcal{M}$ ,  $d\Omega_3^2$  es la métrica de una tres-esfera unidad, y  $R(t)$  es el factor de escala. Este universo estaría lleno con energía oscura y equipado con una ecuación general de estado  $P = w\rho$ , donde  $w$  es un parámetro que consideraremos dependiente del tiempo. Formularemos a continuación un escenario cuántico tentativo para dicho universo. Para ello, consideraremos la acción más general de Hilbert-Einstein, suponiendo además que el factor de escala  $R(t)$  y el campo escalar  $\phi(t)$  son dependientes del tiempo y aparecen en la acción en forma de una combinación dada de  $R$ ,  $\phi$ ,  $\dot{R}$  y  $\dot{\phi}$  (con  $\dot{\phantom{x}} = d/dt$ ). En general, permitiremos que el parámetro de la ecuación de estado  $w$  sea dependiente del tiempo aunque nos restrinjamos al caso donde siempre tengamos  $\dot{w} = 0$ .

Diferenciando la ecuación de Friedmann para un espacio de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker plano [véase la ecuación (5.17)] con respecto del tiempo, se puede ver que si la  $w$  en esa ecuación se considera dependiente del tiempo,

entonces el escalar de curvatura puede generalizarse en la forma

$$\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} - \frac{\dot{R}\dot{w}\ln R^9}{R}, \quad (5.2)$$

donde  $\mathcal{R}$  es la curvatura escalar convencional. En la obtención de esta expresión hemos supuesto primero que  $\rho = \rho_0 R^{-3(1+w)}$ , permitiendo  $w \sim w(t)$  en ella. Como la curvatura escalar para un universo plano viene dada por  $6(\ddot{R} + \dot{R}^2/R^2)$ , se puede comprobar que diferenciando la ecuación (5.17) ésta da lugar al término extra que aparece en la expresión para  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Para esta generalización de la curvatura escalar se debería asociar la correspondiente curvatura extrínseca generalizada  $\tilde{\mathcal{K}}$ . En este caso la acción integral de la variedad  $\mathcal{M}$  con borde  $\partial\mathcal{M}$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} S &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{\tilde{\mathcal{R}}}{16\pi G} + \mathcal{L}_\phi \right) - \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \text{Tr} \tilde{\mathcal{K}} \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} \left( \mathcal{R} - \frac{\dot{R}\dot{w}\ln R^9}{RN^2} \right) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right] \\ &\quad - \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left( \text{Tr} \mathcal{K} - \frac{\dot{w}\ln R^{3/2}}{N} \right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

en la que  $\mathcal{K}$  es la expresión convencional para la curvatura extrínseca,  $g$  y  $h$  denotan, respectivamente, los determinantes de la cuatro-métrica general  $g_{\mu\nu}$  en  $\mathcal{M}$  y la tres-métrica  $h_{i\nu}$  en la hipersuperficie dada por el borde  $\partial\mathcal{M}$ , caracterizada por una función lapso  $N$  y funciones shift  $N_i$ . Obsérvese que: (i) la acción integral anterior se reduce a la acción integral de Hilbert-Einstein convencional para  $w$  constante, (ii) en la integral de superficie también se ha añadido un nuevo término extra no convencional dependiendo de  $\dot{w}$  que podría representar una transición entre universos diferentes, cada uno con una ecuación de estado fijada, y que junto con  $\text{Tr} \mathcal{K}$  daría lugar a la traza de la curvatura extrínseca generalizada  $\text{Tr} \tilde{\mathcal{K}}$ ; y, finalmente, (iii) los momentos conjugados de  $R(t)$  y  $w(t)$  no son separables, incluso aunque hayamos supuesto  $\dot{w} = 0$ .

En el caso en que consideremos que, en principio, no se haya especificado ningún valor particular de  $w$ , a partir de la integral de acción se puede obtener la ligadura Hamiltoniana tomando  $\delta S / \delta N$ . A su vez, dicha ligadura se puede convertir en una ecuación de onda tipo Wheeler-DeWitt aplicando un principio de correspondencia conveniente para el momento conjugado tanto del factor de escala  $R(t)$  como del parámetro de la ecuación de estado  $w(t)$ . No incluiremos aquí el análisis del momento conjugado del campo escalar  $\phi$  ya que al considerar  $w$  como variable dinámica, dado que  $P = w\rho$ ,  $\dot{\phi}^2$  y  $V(\phi)$  siempre se pueden expresar como funciones sencillas de  $w$  y la densidad de energía; es decir, en términos de las

dos variables dinámicas  $w$  y  $R$  [véase por ejemplo las ecuaciones (5.15) y (5.16)]. Usando una variedad euclídea que resulta más conveniente en este caso, donde  $t \rightarrow i\tau$  para nuestra geometría plana, podemos reducir la forma final de la acción euclídea a

$$I = - \int N d\tau \left( -\frac{R\dot{R}^2}{N^2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{w}\dot{R}R^2}{N^2} + \ell_p^2 w R^3 \rho(R, w) \right), \quad (5.4)$$

donde  $\ell_p = \sqrt{8\pi G/3}$  es la longitud de Planck, y  $\rho(R, w) (= \rho_0 R^{-3(1+w)})$  en el modelo sencillo considerado explícitamente a continuación) es la densidad de energía oscura. En el gauge donde  $N = 1$  tenemos la siguiente ligadura Hamiltoniana

$$H = \frac{\delta I}{\delta N} - (1+w) \ell_p^2 R^3 \rho = R\dot{R}^2 - \frac{1}{2} \dot{w}\dot{R}R^2 - \ell_p^2 R^3 \rho(R, w) = 0, \quad (5.5)$$

donde el término  $(1+w)\ell_p^2 R^3 \rho$  debe añadirse para corregir el efecto de reemplazar inicialmente el Lagrangiano del campo  $\mathcal{L}_\phi$ , para  $P = w\rho$  en la acción  $\mathcal{S}$ . Manteniendo  $\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$  en la acción  $\mathcal{S}$ , se obtiene de nuevo la ecuación (5.5), aplicando simplemente el operador  $H = \delta I/\delta N$ . La consistencia de este procedimiento se pone de manifiesto al comprobarse que: (1) en el caso  $\dot{w} = 0$ , la ecuación (5.5) se reduce a la ecuación habitual de Friedmann para geometría plana (es decir, la ecuación (5.17) posterior), y (2) si  $\dot{w} \neq 0$ , aunque la ecuación (5.5) parece diferente formalmente de la ecuación (5.17), ambas son equivalentes al tener en cuenta el hecho de que la densidad de energía viene dada por  $\rho = \rho_0 R^{-3} \exp(-3 \int w(t) \dot{R} dt / R)$  si  $w \neq 0$ , y por  $\rho = \rho_0 R^{-3(1+w)}$  si se considera  $\dot{w} = 0$ . Estas expresiones provienen de la integración directa de la ley de conservación de la energía cósmica,  $\dot{\rho} = -3(P + \rho)\dot{R}/R = -3(1+w)\rho\dot{R}/R$ , en los casos de que o bien se tome  $w$  dependiente del tiempo antes de integrar, o bien  $w$  sea constante, respectivamente. Los momentos conjugados a  $R$  y  $w$  son

$$\pi_R = i \left( \frac{1}{2} \dot{w} R^2 - 2R\dot{R} \right), \quad \pi_w = \frac{i}{2} \dot{R} R^2. \quad (5.6)$$

En términos de los momentos  $\pi_R$  y  $\pi_w$ , la ligadura Hamiltoniana se puede reescribir de la forma

$$H = \pi_w^2 - \frac{R}{2} \pi_R \pi_w - \frac{\ell_p^2}{4} R^6 \rho(R, w) = 0. \quad (5.7)$$

Como ya habíamos anticipado este Hamiltoniano no es separable en las dos componentes consideradas del espacio de momentos.

La descripción cuántica necesaria requiere de un principio de correspondencia que en el caso actual permita la introducción de los operadores cuánticos siguientes

$$\pi_R \rightarrow \tilde{\pi}_R = -i\ell_p^2 \frac{\partial}{\partial R}, \quad \pi_w \rightarrow \tilde{\pi}_w = -i\ell_p^2 \frac{\partial}{\partial w}. \quad (5.8)$$

La introducción de estos operadores en la ligadura Hamiltoniana, nos permite obtener la ecuación de Wheeler-DeWitt. Llegamos así a

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial w^2} - \frac{1}{2}R \frac{\partial^2}{\partial w \partial R} + \frac{1}{4}\ell_p^{-2}R^6\rho(R, w) \right] \Psi(R, w) = 0, \quad (5.9)$$

donde  $\Psi(R, w)$  es en principio un funcional de onda no separable para el universo original.

La resolución de esta ecuación es muy difícil, incluso para las condiciones de contorno iniciales más simples que podamos concebir. Además, aquí podría haber también un problema relacionado con el orden de operadores. Sin embargo, suponiendo por un momento que el funcional de onda se puede escribir inicialmente como un producto separable de la forma  $\Psi(R, w) = \exp(-R/\ell_p)\Psi(w)$ , la ecuación de Wheeler-DeWitt se reduciría a

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial w^2} + \frac{R}{2\ell_p} \frac{\partial}{\partial w} + \frac{1}{4}\ell_p^{-2}R^6\rho(R, w) \right] \Psi(w) = 0. \quad (5.10)$$

En este caso, si se supone también que se conserva la energía oscura total  $E_T = R^3\rho$ , entonces esta ecuación diferencial podría describir un oscilador amortiguado con coeficiente  $\lambda = R/(2\ell_p)$  para una frecuencia cuadrada  $\mu^2 = R^3E_T/(4\ell_p^2)$ , la cual admite las siguientes soluciones generales [75]

1.  $E_T < 1/(4R)$  (Régimen sobreamortiguado)

$$\Psi(w) = e^{-\frac{Rw}{4\ell_p}} \left( C_1 e^{\frac{\xi_1 R w}{4\ell_p}} + C_2 e^{-\frac{\xi_1 R w}{4\ell_p}} \right). \quad (5.11)$$

2.  $E_T = 1/(4R)$  (Régimen amortiguado crítico)

$$\Psi(w) = e^{-\frac{Rw}{4\ell_p}} (C_1 + C_2 w). \quad (5.12)$$

3.  $E_T > 1/(4R)$  (Régimen infraamortiguado)

$$\Psi(w) = e^{-\frac{Rw}{4\ell_p}} \left[ C_1 \cos\left(\frac{\xi_2 R w}{4\ell_p}\right) + C_2 \text{sen}\left(-\frac{\xi_2 R w}{4\ell_p}\right) \right], \quad (5.13)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias,  $\xi_1 = \sqrt{1 - 4E_T R}$  y  $\xi_2 = \sqrt{4E_T R - 1}$ <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Si hubiéramos elegido para  $\Psi(R)$  una función de cuadrado integrable de la forma  $\Psi(R) = \exp(-R^2/2\ell_p^2)$  verificando la condición inicial sin acotación [89, 93] habríamos obtenido las mismas soluciones  $\Psi(w)$  dadas en las ecuaciones (5.11)-(5.13), pero reemplazando en todas ellas el cociente  $R/\ell_p$  por  $R^2/\ell_p^2$  teniendo así una interpretación similar.



Sin embargo, la condición  $\Psi = \exp(-R/\ell_p)\Psi(w)$ , o incluso la condición  $\Psi = \exp(-R^2/2\ell_p^2)\Psi(w)$  es demasiado restrictiva y por lo tanto, se tendría que resolver la ecuación completa de Wheeler-DeWitt con los operadores  $i\partial/\partial w$  y  $i\partial/\partial R$ , que corresponden a los momentos clásicos  $\pi_w$  y  $\pi_R$ , para condiciones iniciales convenientes (incluyendo por ejemplo la imposición de límites superior e inferior en los valores permitidos de  $w$ ). Una vez obtenidos los funcionales de onda  $\Psi(R, w)$ , se tendría que realizar la transformada de Fourier o Laplace (dependiendo si se trabaja en formalismo lorentziano o euclídeo) del funcional de ondas correspondiente en la representación  $K$ ,  $\Phi(\dot{R}, \dot{w})$  (extendiendo también el  $w$ -espacio de la representación  $K$  a un  $R$ -espacio [89, 93] el cual, en la variedad euclídea, podría obtenerse mediante la integral de camino de  $\Psi(R, w) \times \exp(RK + w\dot{w} \ln R^{3/2})$  sobre contornos adecuados de  $R$  y  $w$ ) obteniendo de esta forma un conjunto de estados (presumiblemente discretos) para el universo pequeño descrito en términos de los autovalores cuánticos permitidos del parámetro  $w$ . Así, si el parámetro  $w$  de la ecuación de estado no está fijado, siempre se pueden reordenar términos de tal forma que este parámetro  $w$  pueda ser descrito cuánticamente y tomado como un conjunto de valores distintos, positivos y/o negativos, de acuerdo con la interpretación de muchos mundos en la mecánica cuántica cosmológica. En dicha interpretación, cada  $w$ -autovalor describiría un tipo de radiación que caracterizaría a un universo paralelo diferente en un escenario de multiverso [82].

### 5.3. Salida del periodo inflacionario

Recapitulemos en este punto. La variabilidad del parámetro  $w$  ha sido considerada como una propiedad intrínseca de un universo genérico primordial, de tal forma que mientras inicialmente el tamaño del universo aumenta,  $w$  puede tomar un conjunto de autovalores cuánticos. La interpretación de los muchos mundos del escenario cosmológico cuántico resultante se adopta de tal forma que cada  $w$ -autoestado describa un universo paralelo caracterizado por una expansión dada y por un tipo de radiación determinada que depende de  $w$ . Finalmente, supondremos que a medida que entran en el régimen de evolución clásica, los universos primordiales paralelos mantendrán los valores de  $w$  que los caracterizaban en la etapa anterior y, de esta forma, todas sus características espacio-temporales y energéticas asociadas a este parámetro permanecerían ligadas para siempre a dichos universos, aunque las conexiones no causales introducidas por la presencia de agujeros de gusano estarían permitidas entre los universos paralelos clásicos resultantes. Incluiremos en este punto la siguiente conjetura: entre los distintos destinos futuros de un viaje temporal de un universo primordial fantasma, el principio antrópico [14] elegirá aquel viaje temporal que conecte con un universo que evolucione de acuerdo con el dictamen de un espacio de Friedmann-Lemaître-

Robertson-Walker plano, lleno con radiación caracterizada por un parámetro positivo de la ecuación cósmica de estado  $w = 1/3$ . Todos los destinos diferentes de un viaje temporal del universo fantasma, que tendría lugar antes del big rip o después de él, para el mismo parámetro de la ecuación de estado menor que  $-1$  (el mismo autoestado) en el futuro del mismo universo fantasma, o todos aquellos correspondientes al futuro de otros valores negativos o positivos del parámetro en universos paralelos diferentes (otros distintos del autoestado  $w = 1/3$ ), serían abortados por el principio antrópico, relativo a los observadores de nuestra civilización actual.

A continuación discutiremos un modelo clásico más simple donde se estudiará cómo la inflación puede ocurrir en un universo dominado por energía fantasma, de acuerdo con lo dicho anteriormente. Así, mientras en la era cosmológica cuántica inicial existe un conjunto de autoestados (universos paralelos), cada uno caracterizado por un autovalor particular de  $w$ , en el régimen posterior a esta era inicial, consideraremos individualmente la evolución clásica de cada uno de tales universos paralelos. En este caso interpretaremos que el régimen cuántico inicial está caracterizado por las variables cuánticas dinámicas  $w(t)$  y  $R(t)$ , y el régimen clásico siguiente por un  $R(t)$  clásico y valores constantes de  $w$ . Este es el camino a través del cual la evolución cosmológica cuántica se enlazaría en nuestro escenario con la evolución de campos escalares clásicos. A continuación, consideraremos que el universo temprano corresponde a uno de los universos paralelos mencionados anteriormente, lleno con un fluido de energía oscura genérico y dominante con ecuación de estado constante  $P = w\rho$ , y entonces particularizaremos al caso especial donde el universo está lleno de energía fantasma para la cual  $w < -1$ , asegurando así una expansión super-acelerada interpretable como una fase de inflación. Por lo tanto, tomaremos para la Lagrangiana de un campo de energía oscura  $\phi$ , en un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, la expresión general habitual

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (5.14)$$

donde  $V(\phi)$  es el potencial del campo de energía oscura. Hemos elegido el campo  $\phi$  de forma tal que esté definido en términos de la presión  $P$  y una densidad de energía  $\rho$  de acuerdo con las definiciones convencionales,

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (5.15)$$

Así, para la ecuación de estado  $P = w\rho$  con  $w$  constante, tenemos

$$\dot{\phi}^2 = (1 + w)\rho. \quad (5.16)$$

Ahora, en nuestro universo temprano dominado por energía oscura, recordemos que la ecuación de Friedmann para una geometría plana con factor de escala  $R(t)$

y  $w$  constante viene dada por

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho; \quad (5.17)$$

de este modo, integrando la ecuación de la conservación de la energía cósmica,  $\dot{\rho} + 3(P + \rho)\dot{R}/R = 0$  y usando la ecuación (5.17), podemos obtener el factor de escala

$$R(t) = \left(C + \frac{3}{2}(1+w)t\right)^{2/[3(1+w)]} \equiv T(t)^{2/[3(1+w)]}, \quad (5.18)$$

donde  $C \equiv C(w)$  es una constante para cada valor de  $w$ . De las ecuaciones (5.16) y (5.18) podemos expresar el potencial del campo de energía oscura como

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\rho_0(1+w)e^{-3\sqrt{\frac{1+w}{\rho_0}}\phi}, \quad (5.19)$$

donde  $\rho_0$  es un valor inicial, constante y arbitrario de la densidad de energía. El campo escalar viene dado por

$$\phi = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\rho_0}{1+w}}\ln T(t). \quad (5.20)$$

Ahora nos centraremos en la región fantasma. Para un régimen de energía fantasma  $w < -1$ , haciendo la transformación axiónica  $\phi \rightarrow i\Phi$  [72], las ecuaciones (5.19) y (5.20) se convierten en

$$V(\Phi) = -\frac{1}{2}\rho_0(|w|-1)e^{3\sqrt{\frac{1+w}{\rho_0}}\Phi}, \quad (5.21)$$

$$\Phi = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\rho_0}{|w|-1}}\ln T', \quad (5.22)$$

donde

$$T' = C(w < -1) - \frac{3}{2}(|w|-1)t. \quad (5.23)$$

Usando el potencial fantasma (5.21) puede verse que el campo fantasma inicial (en  $t = 0$ ) estará en el punto más bajo del potencial y su evolución posterior vendrá determinada por un potencial creciente. Esa evolución del campo fantasma tendría lugar mientras el universo se infla rápidamente de acuerdo con la ley  $R = (T')^{-2/[3(|w|-1)]}$ . El proceso inflacionario sólo puede detenerse antes de alcanzar el big rip si se permite la existencia de agujeros de gusano con gargantas del tamaño de la escala de Planck, situados originariamente en la espuma cuántica espaciotemporal, que acreten energía fantasma. Como resultado de tal proceso

de acreción, las gargantas de los agujeros de gusano aumentarán con una tasa de variación mayor que la tasa a la que se infla el universo, de modo que la garganta de los agujeros de gusano se harían eventualmente mayores que el universo mismo, alcanzando finalmente un tamaño infinito en un tiempo finito, antes del que corresponde al big rip [71]

$$\tilde{t} = \frac{t_*}{1 + \frac{b_{0i}}{C(w < -1)b_{0i}}}, \quad (5.24)$$

siendo  $b_{0i}$  el radio inicial del agujero de gusano y  $t_*$  el tiempo del big rip, esto es,

$$t_* = \frac{2C(w < -1)}{3(|w| - 1)}, \quad (5.25)$$

y

$$\dot{b}_{0i} = \frac{3}{4\pi^2 D \rho_0}, \quad (5.26)$$

donde  $D$  es una constante de orden unidad. Así, la inflación del universo se detendría debido a la interrupción no cronológica de la evolución causal alcanzada en un tiempo anterior a  $\tilde{t}$ , en el cual el tamaño del radio de la garganta del agujero de gusano supera simplemente el tamaño del universo. Por ejemplo, para un parámetro de ecuación de estado constante  $w = -5/3$ , por ejemplo, ese tiempo viene dado por

$$\bar{t} = C(w = -5/3) - \left( \frac{A + \sqrt{A^2 - \frac{4b_{0i}^2 C(w = -5/3)}{b_{0i} t_*}}}{2b_{0i}} \right), \quad (5.27)$$

donde

$$A = 1 + \frac{b_{0i}}{\dot{b}_{0i} t_*}. \quad (5.28)$$

Después de  $t = \bar{t}$ , el universo fantasma como un todo entraría en una fase no causal donde podría viajar a través del tiempo de una manera en principio acronal<sup>2</sup>, regresando a su origen o yendo a su futuro para desembocar en la cosmología observable de Friedmann con la que estamos familiarizados. Entre todos los presumiblemente infinitos destinos futuros posibles del viajero temporal cósmico primordial, que están permitidos por la imagen de universos paralelos cuánticos, el principio antrópico podría entonces elegir de esta forma sólo aquella evolución futura que esté gobernada por un escenario de Friedmann dominado por radiación con  $w = 1/3$ , abortando las soluciones cosmológicas restantes en relación con las civilizaciones existentes pasadas, presentes o futuras [véase figura 5.2].

---

<sup>2</sup>Nótese sin embargo que en el contexto del multiverso, estrictamente, no puede hablarse de una violación de la causalidad, dado que cada uno de los universos que constituyen dicho multiverso posee su propia definición de tiempo.

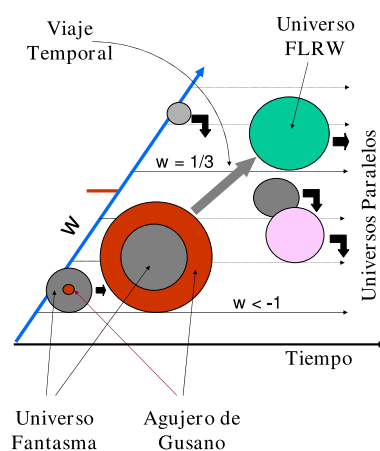


Figura 5.2: Representación esquemática de la salida suave del proceso de inflación primordial producido por energía fantasma. Está basada en el viaje temporal de todo un universo suficientemente inflado en un régimen de energía fantasma a un régimen dominado por radiación usual. Tal proceso es en general de naturaleza no cronal y está elegido por argumentos antrópicos sobre todas las otras configuraciones cosmológicas posibles, permitidas por la interpretación de los muchos-mundos de la mecánica cuántica del universo temprano.

Por otra parte, las expresiones generales para la temperatura de radiación y densidad de energía vienen dadas respectivamente por [65]  $\Theta \propto (1+w)R^{-3w}$  y  $\rho \propto [\Theta/(1+w)]^{(1+w)/w}$ . De ello se deduce que la temperatura del universo fantasma es negativa y por lo tanto está en cualquier caso más caliente que el universo anfitrión. El viaje temporal desde un universo con  $w < -1$  a un universo con  $w = 1/3$  (supuestos ambos como autoestados diferentes de la misma ecuación de ondas cósmica, véase la figura 5.3) seguirá el flujo natural de la energía y *globalmente* convertirá un campo de radiación que estaba inicialmente caracterizado por una temperatura negativa con un valor absoluto muy grande y por una densidad de energía así mismo grande, con  $w < -1$ , en un campo de radiación con temperatura positiva con un valor absoluto bastante pequeño y densidad de energía bastante menor, con  $w = 1/3$  (ya que los efectos cosmológicos dictados por el autovalor  $w$  deben prevalecer globalmente sobre los efectos locales microscópicos). Sin embargo, al mismo tiempo que tal conversión cosmológica tiene lugar, la sustancia fantasma interactuaría *localmente* con la sustancia del universo de Friedmann anfitrión, ya que esas sustancias inicialmente conservarían

sus propiedades microscópicas y termodinámicas localmente. De hecho, dentro de un volumen pequeño dado  $\delta V$  lleno con energía fantasma, la energía interna  $\delta U = (1 + w)\rho\delta V$ , es definida negativa y su valor absoluto inicial es bastante mayor que la energía interna positiva de la radiación en el universo anfitrión, dentro del mismo volumen  $\delta V$ . Como resultado de tal interacción inicial, toda la energía presente inicialmente en el universo anfitrión sería aniquilada, mientras casi toda la radiación fantasma quedaría prácticamente inalterada aunque globalmente se comportaría como si fuera un campo de radiación con  $w = 1/3$ . Así, para un observador actual, la radiación fantasma transferida que quedaría después de la interacción microscópica sería simplemente la radiación del fondo de microondas usual caracterizada por un parámetro  $w = 1/3$ .

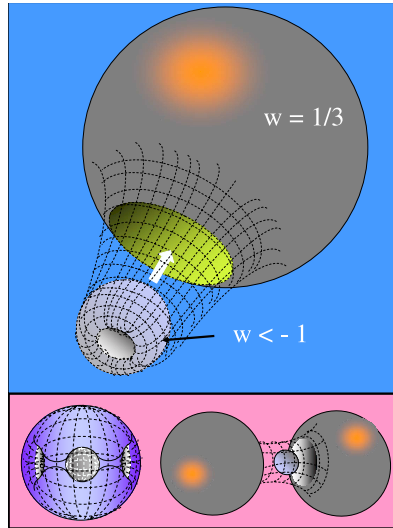


Figura 5.3: Representación artística del proceso de un viaje temporal en el cual un universo fantasma con  $w < -1$  se convierte en un universo con  $w = 1/3$  en el futuro. Este proceso se lleva a cabo usando la topología representada en la parte superior de esta figura por un agujero de gusano inflado cuyo tamaño ha excedido el radio del universo fantasma insertando una de sus bocas en el universo fantasma mientras que la otra se conecta a un universo anfitrión. En el cuadro de abajo de la figura también podemos ver otras dos posibles topologías que podría adoptar la garganta crecida del agujero de gusano y el universo fantasma. En la izquierda, la topología corresponde a un agujero de gusano que envuelve al universo fantasma, y en la derecha, vemos una topología más complicada donde, además del universo fantasma y el agujero de gusano, hay otros dos universos extra a los que se insertan las dos bocas del agujero de gusano.

A continuación, y en relación con observadores actuales, además de la trasfe-

rencia de una proporción subdominante de materia, el efecto observable inducido en el universo de Friedmann por dicha transición sería el de convertir las propias desconexiones causales relativas a los observadores presentes en un universo sin inflación en una conexión completa causal de todas sus componentes, resolviendo así cualquier problema de uniformidad u horizontes [véase figura 5.4]. De esta manera, nosotros no estaríamos hechos de la materia y energía positiva creada en el big bang de nuestro Universo, sino más bien de una mezcla de tales componentes con la materia y la energía fantasma creada en el origen de un universo distinto al nuestro. También habría que mencionar que para que tenga lugar la transición considerada, ésta se debe realizar antes de que el radio de la garganta del agujero de gusano se haga infinito (esto es, a lo largo del intervalo temporal  $\Delta_{\text{nocronal}}$  de la figura 5.1), ya que, de otro modo, el agujero de gusano se convierte en un puente de Einstein-Rosen, cuya garganta se estrangularía inmediatamente, dejando un par agujero blanco-negro que acretarían energía fantasma y desaparecerían rápidamente [71] [véase figura 5.5].

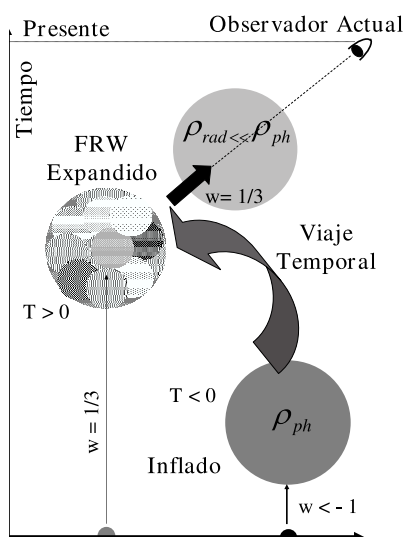


Figura 5.4: La uniformidad se transfiere desde el universo fantasma inflado a nuestro universo cuando el primer universo es absorbido por el siguiente después del viaje temporal. Antes de éste, nuestro universo está desconectado causalmente por completo respecto a los observadores actuales. Como el universo fantasma estaba más caliente que el nuestro, cuando ambos entraron en contacto, toda la energía distribuida de manera uniforme se transfirió a nuestro universo, aniquilando todas las inhomogeneidades.

Finalmente, notaremos que, relativo a un observador “cuántico” hipotético (es

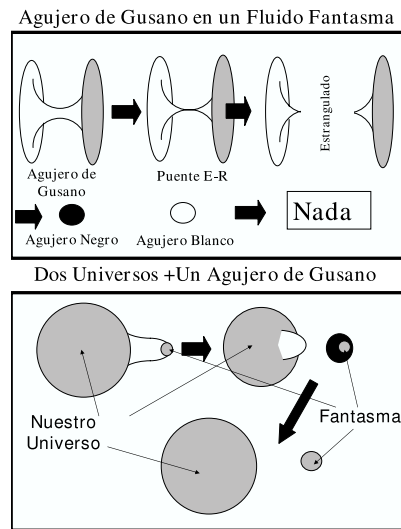


Figura 5.5: Parte superior: Después de un tiempo  $t = \tilde{t}$  el agujero de gusano se convierte inmediatamente en un puente de Einstein-Rosen cuya garganta se estrangula rápidamente, dejando un agujero negro y otro blanco. Estos agujeros desaparecen rápidamente debido a la acreción continuada de energía fantasma. Parte inferior: El mismo régimen en el caso de un agujero de gusano conectando un universo fantasma con otro universo distinto parecido al nuestro. En dicho caso, cada uno de estos universos están encajados al principio en un agujero negro o blanco gigante que se desconectan mutuamente. Entonces, los agujeros desaparecen rápidamente y finalmente los dos universos desconectados son el resultado del proceso completo.

decir, un observador que pudiera observar simultáneamente todos los autouniversos), el proceso completo que hemos discutido violaría la segunda ley de la termodinámica. De hecho, si no tenemos en cuenta los contenidos materiales de los universos, la entropía de cada uno de ellos es una constante universal  $\sigma$  [65], y, por lo tanto, la entropía total inicial sería  $n\sigma$ , con  $n$  el número de autouniversos. Después del viaje temporal discutido anteriormente, la entropía total debería disminuir a un valor  $(n - 1)\sigma$ . Además, también tendría lugar una violación de la segunda ley, relativa a un observador en nuestro universo, debido al aumento de coherencia inducida en el universo anfitrión por el intercambio de su contenido de radiación original en el universo fantasma. Esas violaciones de la segunda ley se pueden ver como consecuencias del hecho de que cualquier sustancia que sea del tipo energía fantasma debe de verse como una sustancia cuántica esencial sin análogo clásico, donde pueden aparecer temperaturas negativas y entropías decrecientes, tal como se ha visto que ocurre en los estados de entrelazamiento y



sistemas de espines nucleares.

## 5.4. Resumen y comentarios

Todo el escenario discutido en este capítulo es bastante especulativo y por supuesto podrá dar lugar a problemas y dificultades que merecerían una consideración más detallada. El problema más importante hace referencia a la densidad y las fluctuaciones de ondas gravitacionales que se originan en la época de inflación fantasma, así como a la forma de comparar estas fluctuaciones con las fluctuaciones de temperaturas observadas actualmente en el fondo cósmico de microondas por WMAP [107]. Aunque no intentamos realizar una investigación completa de tales asuntos, parece conveniente hacer una breve discusión. De las ecuaciones (5.18), (5.21)-(5.23), se puede obtener que las condiciones de salto suave para nuestro modelo de inflación fantasma son

$$\varepsilon_{\text{ph}} = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2}(|w| - 1) \ll 1, \quad \delta_{\text{ph}} = -\frac{\ddot{\Phi}}{\dot{\Phi}H} = \varepsilon_{\text{ph}} \ll 1, \quad (5.29)$$

donde  $H = \dot{R}/R$ . Cuando se verifican las condiciones (5.29) el factor de escala evoluciona con el tiempo aproximadamente como una exponencial, tipo de Sitter; mientras que el parámetro  $w < -1$  tiene que tomar valores que estén muy próximos a  $-1$ . Las perturbaciones métricas se pueden estudiar siguiendo por ejemplo el procedimiento de la referencia [138]. De este modo, en el gauge longitudinal y en ausencia de presiones anisotrópicas, las perturbaciones a la métrica escalar se pueden expresar en términos de una métrica perturbada como una función tanto del potencial de Bardeen,  $V_B$ , como del tiempo conforme  $\eta = \int dt/R(t)$ , con  $R(\eta) = [-(|w| - 1)\eta/2]^{-2/[2(|w|-1)]}$ . La perturbación de la curvatura en una hipersuperficie uniformemente comóvil viene dada en este caso por

$$\zeta = V_B + \frac{(3|w| - 1)\eta V_B' - 2V_B}{3(|w| - 1)}, \quad (5.30)$$

donde  $' = d/d\eta$ . Se tiene que la ecuación diferencial del movimiento para la perturbación  $\zeta$  se puede escribir como

$$\vartheta_k'' + \left( k^2 - \frac{2(1 + 3|w|)}{(3|w| - 1)^2 \eta^2} \right) \vartheta_k = 0, \quad (5.31)$$

donde  $\vartheta = R^2 \Phi' \zeta / R' = z \zeta$ , siendo  $z = \sqrt{\rho_0 (|w| - 1)} [-(3|w| - 1)\eta/2]^{-2/(3|w|-1)}$ . La ecuación (5.31) admite una solución analítica exacta en términos de la función de Bessel  $B$  [1]:

$$\vartheta_k = \eta^{1/2} B_{\frac{3(1+|w|)}{2(3|w|-1)}}(k\eta) \simeq \eta^{1/2} B_{\frac{3}{2} + \varepsilon_{\text{ph}}}(k\eta). \quad (5.32)$$

La aproximación contenida en la ecuación anterior es válida sólo si se satisfacen las condiciones de salto suave. La inclusión de las condiciones iniciales apropiadas elegirá la función de Bessel precisa que se tendría que usar. Entonces, la amplitud asociada con esta perturbación vendrá dada por [138]

$$A_s = \frac{2}{3(|w| - 1)(T')_{k=RH}^2}, \quad (5.33)$$

mientras que el índice espectral es  $n_s = \frac{3}{2} \left( \frac{5|w|-3}{3|w|-1} \right)$ . La amplitud para la perturbación del tensor se puede obtener de forma análoga. Es decir

$$A_t = \left( \frac{1}{T'} \right)_{k=RH}^2, \quad (5.34)$$

con un índice espectral  $n_t \simeq -3(|w| - 1)$ .

La razón  $A_t/A_s = 3(|w| - 1)/2 \simeq \epsilon_{ph}$  se tendría que comparar ahora con la razón tensor/escalar de las contribuciones cuadrupolares del fondo cósmico de microondas,  $\tau \sim \epsilon_{ph}$ , para bajo orden.

# Capítulo 6

## Acreción de energía oscura en agujeros negros de Kerr-Newman

Este capítulo trata del estudio de la acreción de energía oscura con ecuación de estado  $P = w\rho$  en agujeros negros de Kerr-Newman. El resultado es que cuando  $w > -1$  la masa y el momento angular específico aumentan; mientras que el momento angular específico lo hace hasta un valor constante, la masa crece sin límite. En el régimen donde se viola la condición de energía dominante nuestro modelo predice una disminución progresiva de la masa y el momento angular de los agujeros negros, según se va acretando energía fantasma. Las masas y los momentos angulares de todos los agujeros negros tienden a cero según se aproximan al big rip. Los resultados sobre la violación de la conjetura del censor cósmico y sobre el hecho de que el tamaño del agujero negro crezca más allá del tamaño del universo se discuten bajo la consideración de que los modelos usados son aproximaciones a descripciones más generales donde la métrica depende del tiempo.

### 6.1. Introducción

En trabajos recientes [9, 10] se ha visto que la masa de un agujero negro de Schwarzschild disminuye con la acreción de energía fantasma, de tal forma que el agujero negro desaparece en el tiempo del big rip. Por lo tanto, es interesante estudiar cómo se acreta la energía oscura en agujeros negros más generales, es decir, agujeros negros que tengan carga y momento angular. El interés de este estudio aumenta si se tiene en cuenta la competición eventual, o contribución añadida, que podría surgir entre el proceso de acreción de energía oscura y el de super-radiancia, que tiende a disminuir la energía rotacional (o carga) del agujero, disminuyendo así su espín (o carga), tal como uno esperaría que indujera la energía fantasma también. Por este motivo, en este capítulo investigaremos cómo

se van acretando las distintas formas de energía oscura en agujeros negros de Kerr-Newman.

De hecho obtenemos que los agujeros negros de Kerr-Newman aumentan progresivamente su masa y momento angular como resultado de la acreción de energía oscura cuando la ecuación de estado permite  $P + \rho > 0$ . Ese aumento de masa y momento angular no tiene cota, o tiende a una constante dada, dependiendo del modelo de energía oscura considerado. Si  $P + \rho < 0$  entonces ambos, masa y momento angular del agujero negro, disminuyen rápidamente hasta desaparecer en el big rip, o tienden a valores constantes en caso de ausencia de una singularidad futura. Se ha visto que el proceso anterior prevalece tanto sobre el proceso de evaporación Hawking como el de super-radiancia de espín. Nuestros resultados cuantitativos parecen indicar, por otro lado, que mientras la energía fantasma no viola la conjetura del censor cósmico [136], la energía oscura con  $w > -1$  sí lo hace.

Este capítulo se puede organizar como sigue. En la siguiente sección se generalizará la solución obtenida por Babichev, Dokuchaev y Eroshenko [9, 10] al caso de acreción de energía oscura en un agujero negro rotante con carga, y se presentan las ecuaciones generales para la variación del momento angular y la masa. En la sección siguiente se aplica este formalismo al campo cosmológico de quintaesencia y también al modelo de gas de Chaplygin generalizado, analizando en cada caso la evolución correspondiente del agujero negro. En la sección 6.4 discutimos el resultado de la violación de la censura cósmica y el del crecimiento sin cota del tamaño del agujero negro más allá del tamaño del universo considerando los modelos usados como aproximaciones a una descripción más general donde la métrica no sea estática. Finalmente, resumiremos y discutiremos brevemente los resultados de este capítulo en la sección 6.5.

## **6.2. Generalización del modelo de acreción a agujeros negros de Kerr-Newman**

En esta sección seguiremos el formalismo de acreción, considerado primeramente por Babichev, Dokuchaev y Eroshenko [9, 10], generalizándolo al caso en el cual el agujero negro tenga momento angular y carga. En primer lugar, notaremos que, incluso cuando se usa una métrica estática de Kerr-Newman, la evolución temporal inducida por la acreción será tenida en cuenta por la dependencia temporal del factor de escala entrante en las leyes de conservación integradas y las ecuaciones de variación de la masa y el momento angular. A través de este capítulo usaremos unidades naturales, así  $G = c = 1$ . Consideremos un espacio-tiempo de Kerr-Newman estacionario y axisimétrico. La métrica en este caso viene dada

por

$$\begin{aligned}
ds^2 = & \left(1 + \frac{Q^2 - 2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) dt^2 + \frac{2a(2Mr - Q^2) \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt d\phi \\
& - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\
& - \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta - Q^2 a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) d\phi^2, \quad (6.1)
\end{aligned}$$

donde  $M$  es la masa,  $Q$  es la carga eléctrica,  $a = J/M$  es el momento angular específico del agujero negro, siendo  $J$  el momento angular total,  $r$  la coordenada radial y,  $\theta$  y  $\phi$  las coordenadas angulares esféricas. Modelaremos la energía oscura por un fluido perfecto con presión negativa y una ecuación de estado arbitraria  $P(\rho)$ , con un tensor energía-impulso

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (6.2)$$

donde  $P$  es la presión,  $\rho$  es la densidad de energía, y  $u^\mu = dx^\mu/ds$  es la cuatro-velocidad, con  $u^\mu u_\mu = 1$ . La componente cero (temporal) de la ley de conservación del tensor energía-impulso  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{d}{dr} \left[ (P + \rho) \left(1 + \frac{Q^2 - 2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \right] \\
& + \frac{2r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (P + \rho) \left(1 + \frac{Q^2 - 2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \\
& + \frac{d}{d\theta} \left[ (P + \rho) \left(1 + \frac{Q^2 - 2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \frac{dt}{ds} \frac{d\theta}{ds} \right] \\
& + \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{2a^2 \sin \theta \cos \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) (P + \rho) \left(1 + \frac{Q^2 - 2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \frac{dt}{ds} \frac{d\theta}{ds}. \quad (6.3)
\end{aligned}$$

Esta expresión deberá ser integrada ahora. Consideraremos dos casos. Primero, tomaremos  $\theta$  como una constante. La ecuación de estado (6.3) nos proporciona entonces,

$$\begin{aligned}
C_M = & \frac{u}{M^2} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) (P + \rho) \\
& \times \left(1 + \frac{Q^2 - 2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta + Q^2 - 2Mr}{r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr} u^2\right)^{1/2}, \quad (6.4)
\end{aligned}$$

donde  $u = dr/ds$ , y  $C_M$  es una constante de integración.

Se puede obtener otra integral del movimiento usando la proyección de la ley de conservación del tensor energía-impulso sobre la cuatro-velocidad, es decir, la ecuación de flujo

$$u_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (6.5)$$

Para un fluido perfecto, esta ecuación se reduce a

$$u^\mu \rho_{;\mu} + (P + \rho) u^\mu{}_{;\mu} = 0. \quad (6.6)$$

La integración de la ecuación (6.6) nos proporciona la segunda integral del movimiento que usaremos en lo que sigue,

$$\frac{u}{M^2} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \exp \left[ \int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{P(\rho') + \rho'} \right] = -A_M, \quad (6.7)$$

donde  $u < 0$  en el caso de un fluido dirigido hacia el agujero negro, y  $A_M$  es una constante positiva adimensional. La ecuación (6.7) nos da el flujo de energía inducido en el proceso de acreción. De las ecuaciones (6.4) y (6.7) se obtiene:

$$\begin{aligned} C_{2M} &= \left( 1 + \frac{Q^2 - 2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta + Q^2 - 2Mr}{r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr} u^2 \right)^{1/2} \\ &\times (P + \rho) \exp \left[ - \int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{P(\rho') + \rho'} \right], \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde  $C_{2M} = -C_M/A_M = P(\rho_\infty) + \rho_\infty$ .

La tasa de variación de la masa del agujero negro debido a la acreción de energía oscura se puede obtener integrando sobre el elemento de área la densidad de momento  $T_0^r$ , esto es [109]

$$\dot{M} = - \int T_0^r dA, \quad (6.9)$$

siendo  $dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ , y  $r$  constante. Usando las ecuaciones (6.2), (6.7) y (6.8) esta ecuación se puede re-expresar como [101]

$$\dot{M} = \frac{4\pi A_M M^3 r}{J} \arctan \left( \frac{J}{Mr} \right) [P(\rho_\infty) + \rho_\infty], \quad (6.10)$$

donde  $r$  y  $J$  son constantes. Es interesante hacer notar que la ecuación (6.10) se reduce de manera consistente a la correspondiente ecuación de variación para un agujero negro de Schwarzschild derivada por Babichev, Dokuchaev y Eroshenko en las referencias [9, 10] cuando uno considera  $J$  muy pequeño. Su integración gobierna la evolución de la masa de un agujero negro de Kerr-Newman

$$\int_{M_0}^M \frac{JdM}{M^3 r \arctan\left(\frac{J}{Mr}\right)} = 4\pi A_M \int_{t_0}^t [P(\rho_\infty) + \rho_\infty] dt. \quad (6.11)$$

Ahora, la integración del lado de la izquierda de la ecuación (6.11) da lugar a:

$$\begin{aligned} I(M) = & \int_{M_0}^M \frac{JdM}{M^3 r \arctan\left(\frac{J}{Mr}\right)} = -\frac{r}{2J} \times \left[ \frac{1 + \frac{J^2}{M^2 r^2}}{\arctan\left(\frac{J}{Mr}\right)} + \frac{J}{Mr \arctan^2\left(\frac{J}{Mr}\right)} \right. \\ & \left. + \frac{4}{\arctan^3\left(\frac{J}{Mr}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{2k} - 1) \arctan^{2k}\left(\frac{J}{Mr}\right)}{\pi^{2k} (2k - 3)} \zeta(2k) \right]_{M_0}^M, \end{aligned} \quad (6.12)$$

donde  $\zeta$  es la función zeta de Riemann. La integración del lado derecho de la ecuación (6.11) se realizará en la siguiente sección.

Consideremos ahora  $r$ , en lugar de  $\theta$ , como una constante. Así, la integración de la ecuación (6.3) proporciona

$$\begin{aligned} C_a = & \frac{\omega}{a} \sin\theta (r^2 + a^2 \cos^2\theta) (P + \rho) \\ & \times \left[ 1 + \frac{Q^2 - 2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2\theta} + (r^2 + a^2 \cos^2\theta + Q^2 - 2Mr) \omega^2 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

donde  $\omega = d\theta/ds$ , y  $C_a$  es otra constante de integración.

La segunda integral del movimiento para el flujo de energía en este caso, también se obtiene de la proyección de la ley de conservación del tensor energía-impulso sobre la cuatro-velocidad; así, la integración de la ecuación (6.6) en esta situación nos proporciona la segunda integral del movimiento

$$\frac{1}{a} \omega \sin\theta (r^2 + a^2 \cos^2\theta) \exp \left[ \int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{P(\rho') + \rho'} \right] = -A_a, \quad (6.14)$$

donde  $\omega < 0$  en el caso de un fluido dirigido hacia el interior del agujero negro, y  $A_a$  es una constante positiva adimensional. De las ecuaciones (6.13) y (6.14) se obtiene:

$$\begin{aligned} C_{2a} = & \left( 1 + \frac{Q^2 - 2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2\theta} + (r^2 + a^2 \cos^2\theta + Q^2 - 2Mr) \omega^2 \right)^{1/2} \\ & \times (P + \rho) \exp \left[ - \int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{P(\rho') + \rho'} \right], \end{aligned} \quad (6.15)$$

donde  $C_{2a} = -C_a/A_a = P(\rho_\infty) + \rho_\infty$ .

Tomemos ahora la tasa de variación del momento angular específico del agujero negro de Kerr-Newman causada por la acreción de la energía oscura. Ésta se puede escribir [109]

$$\dot{a} = - \int r T_0^\theta dA, \quad (6.16)$$

siendo  $dA = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ , y  $r$  constante. Usando las ecuaciones (6.14) y (6.15), podemos obtener [101]

$$\dot{a} = \frac{2\pi^2 A_a a r^2 [\rho_\infty + P(\rho_\infty)]}{\sqrt{r^2 + a^2}} \quad (6.17)$$

donde  $r$  es constante. Se tiene así la siguiente expresión integral que nos informa sobre la evolución del momento angular específico:

$$\int_{a_0}^a \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{a r^2} da = 2\pi^2 A_a \int_{t_0}^t [P(\rho_\infty) + \rho_\infty] dt. \quad (6.18)$$

Entonces, la integración del lado izquierdo de la ecuación (6.18) nos produce la expresión siguiente:

$$I(a) = \int_{a_0}^a \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{a r^2} da = \frac{1}{r^2} \left\{ \sqrt{a^2 + r^2} - \frac{1}{r} \ln \left[ \frac{2r}{a} \left( r + \sqrt{a^2 + r^2} \right) \right] \right\}_{a_0}^a. \quad (6.19)$$

La integración del lado derecho de la ecuación (6.18) se calculará de nuevo en la sección siguiente para los distintos modelos de energía oscura.

Ahora, estudiamos la influencia de la acreción de energía oscura sobre el momento angular  $J$ . Usando  $J = Ma$  y las ecuaciones (6.9) y (6.16) podemos obtener la tasa de variación del momento angular de un agujero negro realizando la integración siguiente

$$\dot{J} = - \int \left( Mr T_0^\theta + a T_0^r \right) dA, \quad (6.20)$$

donde  $dA = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ , y  $r$  es constante. Así, obtenemos

$$\dot{J} = \pi [P(\rho_\infty) + \rho_\infty] \left[ \frac{2J\pi A_a r}{\sqrt{1 + \frac{J^2}{M^2 r^2}}} + 4A_M M^2 r \arctan \left( \frac{J}{Mr} \right) \right], \quad (6.21)$$

siendo  $M$  y  $r$  constantes. Por lo tanto, uno tiene la siguiente expresión integral que gobierna la evolución del momento angular de un agujero negro:



$$\int_{J_0}^J \frac{dJ}{\frac{2J\pi A_a r}{\sqrt{1+\frac{J^2}{M^2 r^2}} + 4A_M M^2 r \arctan\left(\frac{J}{Mr}\right)}} = \pi \int_{t_0}^t [P(\rho_\infty) + \rho_\infty] dt. \quad (6.22)$$

De nuevo la integración del lado derecho de la ecuación se llevará a cabo en la sección siguiente. Aquí, no hemos podido realizar la integración del lado izquierdo (L) de forma analítica, por lo que hemos procedido como sigue. La integral (L), en la ecuación (6.22) la podemos reescribir de la forma siguiente

$$L = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\cos^2 x (2r\pi A_a \sin x + 4A_M M x)}, \quad 0 \leq x \leq \pi/2, \quad (6.23)$$

donde  $x = \arctan(J/Mr)$ . Nótese, que como  $0 \leq \sin x \leq x$ , tenemos

$$\begin{aligned} L &\geq \int_{x_0}^x \frac{dx}{(2\pi A_a r + 4A_M M) x \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{2\pi A_a r + 4A_M M} \left[ \frac{\tan x}{x} + \ln x + \frac{1}{x^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2^{2k} - 1) x^{2k}}{(k-1) \pi^{2k}} \zeta(2k) \right]_{x_0}^x \\ &= \frac{1}{2\pi A_a r + 4A_M M} \left[ \frac{J}{Mr \arctan\left(\frac{J}{Mr}\right)} + \ln \arctan\left(\frac{J}{Mr}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\arctan^2\left(\frac{J}{Mr}\right)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2^{2k} - 1) \arctan^{2k}\left(\frac{J}{Mr}\right)}{(k-1) \pi^{2k}} \zeta(2k) \right]_{J_0}^J = I(J), \quad (6.24) \end{aligned}$$

donde  $\zeta$  es de nuevo la función zeta de Riemann. Así,  $L \geq I(J)$ , lo que implica que si usamos  $I(J)$  para el estudio de la evolución de un agujero negro de Kerr-Newman y se conserva físicamente la conjetura de la censura cósmica, entonces  $L$  tendría que respetar también esta conjetura. Este argumento nos permite usar  $I(J)$  como un expresión conveniente para el estudio de la evolución de  $J$  durante la acreción de energía oscura.

### 6.3. Modelos cosmológicos

Para obtener expresiones integradas exactas para las expresiones a la derecha de las ecuaciones (6.11), (6.18) y (6.22), usaremos en esta sección dos modelos diferentes para la energía oscura: los modelos de quintaesencia y de gas de Chaplygin generalizado. Se puede ver que los resultados obtenidos usando los modelos de quintaesencia son los mismos que los que se derivan de usar los modelos de K-esencia para la energía oscura.

### 6.3.1. Modelos de quintaesencia

Recuérdese que si se comienza con la ecuación de estado  $P = w\rho$ , donde  $w$  se considera constante, podemos usar la conservación del tensor energía-impulso para obtener

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3(1+w)}, \quad (6.25)$$

donde  $R \equiv R(t)$  es el factor de escala, con  $\rho_0$  y  $R_0$  constantes. De aquí

$$\int_{t_0}^t [P(\rho_\infty) + \rho_\infty] dt = (1+w)\rho_0 R_0^{3(1+w)} \int_{t_0}^t R^{-3(1+w)} dt. \quad (6.26)$$

Entonces tenemos para el factor de escala [12,13,16,35,36,67,95–97,162,164] correspondiente a un universo de quintaesencia general plano

$$R(t) = R_0 \left( 1 + \frac{3}{2}(1+w)C^{1/2}(t-t_0) \right)^{2/[3(1+w)]}, \quad (6.27)$$

donde  $C = 8\pi\rho_0/3$ . La integración del lado derecho de las ecuaciones (6.11), (6.18) y (6.22) se puede realizar ahora usando la ecuación (6.27). Se obtiene, respectivamente [101]

$$t = t_0 + \frac{I(M)}{(1+w) \left( 4\pi A_M \rho_0 - \frac{3}{2}C^{1/2}I(M) \right)}, \quad (6.28)$$

$$t = t_0 + \frac{I(a)}{(1+w) \left( 2\pi^2 A_a \rho_0 - \frac{3}{2}C^{1/2}I(a) \right)}, \quad (6.29)$$

$$t = t_0 + \frac{I(J)}{(1+w) \left( \pi\rho_0 - \frac{3}{2}C^{1/2}I(J) \right)}, \quad (6.30)$$

donde  $I(M)$ ,  $I(a)$  y  $I(J)$  están definidos en las ecuaciones (6.12), (6.19) y (6.24), respectivamente. Estas tres ecuaciones paramétricas nos permiten obtener cómo evolucionan la masa, momento angular específico y momento angular en un universo en expansión acelerada. Así, si  $w > -1$  vemos que  $M$ ,  $a$ , y  $J$  aumentarán progresivamente con el tiempo desde sus valores iniciales, tendiendo  $a$  a un valor finito constante según  $t \rightarrow \infty$ , lo que demuestra que el aumento de  $M$  tiende a ser proporcional al aumento de  $J$ ; sin embargo  $M$ , tiende a infinito en un tiempo finito, pero  $J$  tiende a un valor constante según  $t \rightarrow \infty$ . Obsérvese que no hay contradicción entre los resultados de las figuras 6.2 y 6.3 ya que la gráfica de la figura 6.3 se ha obtenido suponiendo un valor constante de la masa. Cuanto mayor sea  $w$  más rápido es el aumento de esos parámetros [véase figuras 6.1, 6.2 y 6.3].

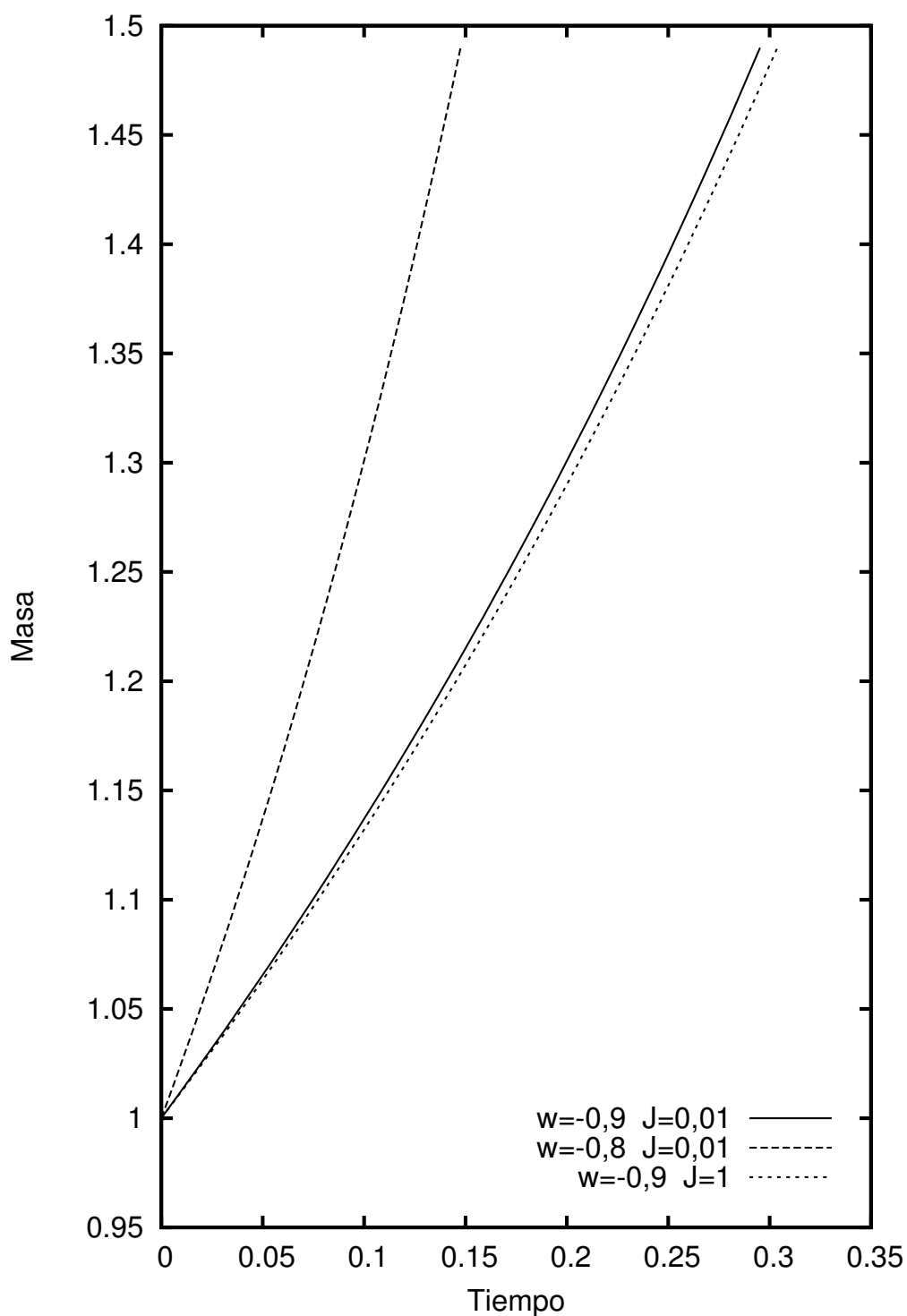


Figura 6.1: Esta figura muestra el comportamiento de la masa de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de energía oscura con  $w = -0,8$  y  $w = -0,9$ . Se observa que cuanto mayor sea  $w$  o menor  $J$ , más rápido es el aumento de la masa.

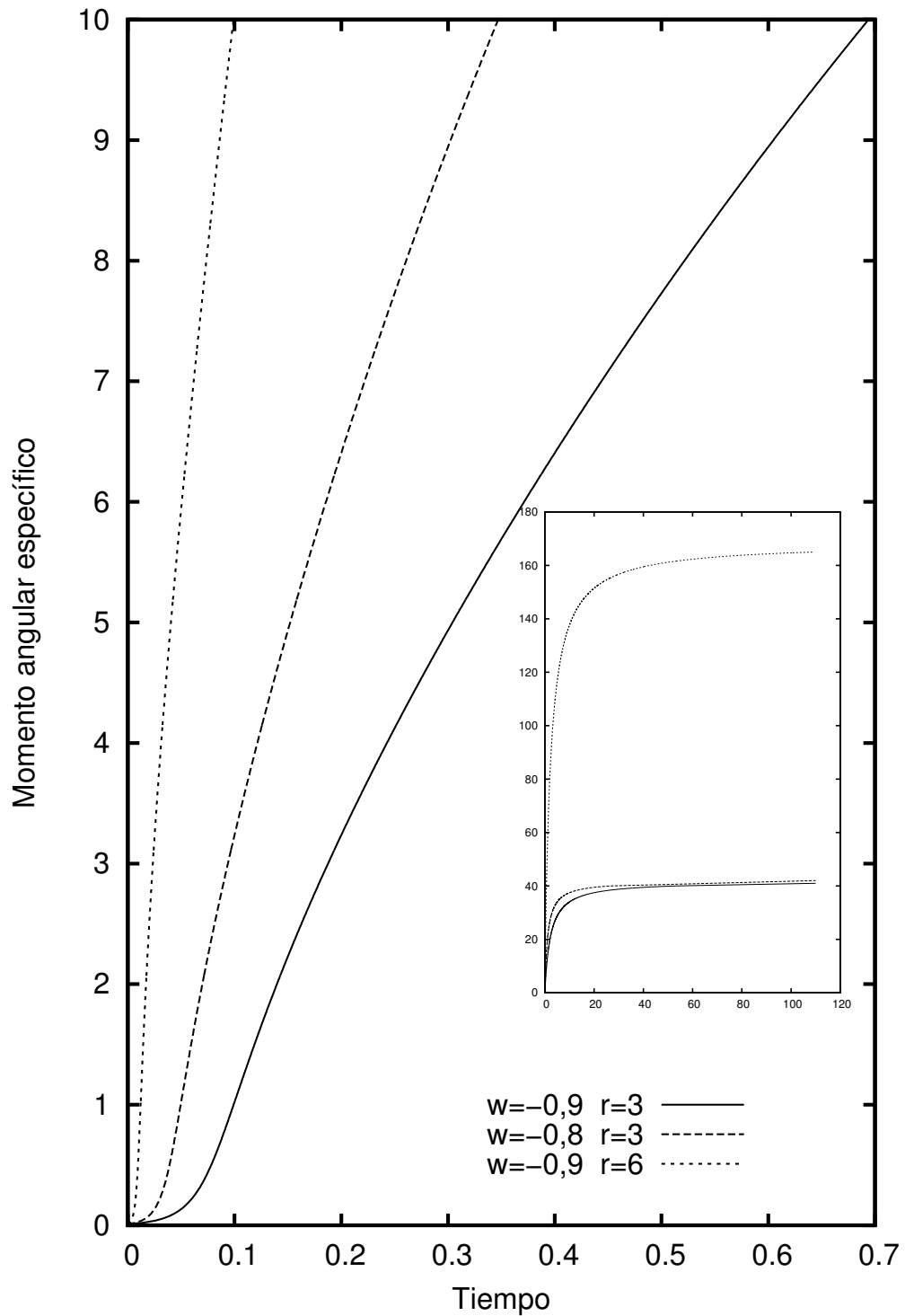


Figura 6.2: Esta figura muestra el comportamiento del momento angular específico de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de energía oscura con  $w = -0,8$  y  $w = -0,9$ . Se observa que cuanto mayor sea  $w$  o  $r$ , más rápido es el aumento del momento angular específico. En la gráfica insertada podemos ver que  $a$  tiende a un valor constante a tiempos grandes para todos los casos estudiados.

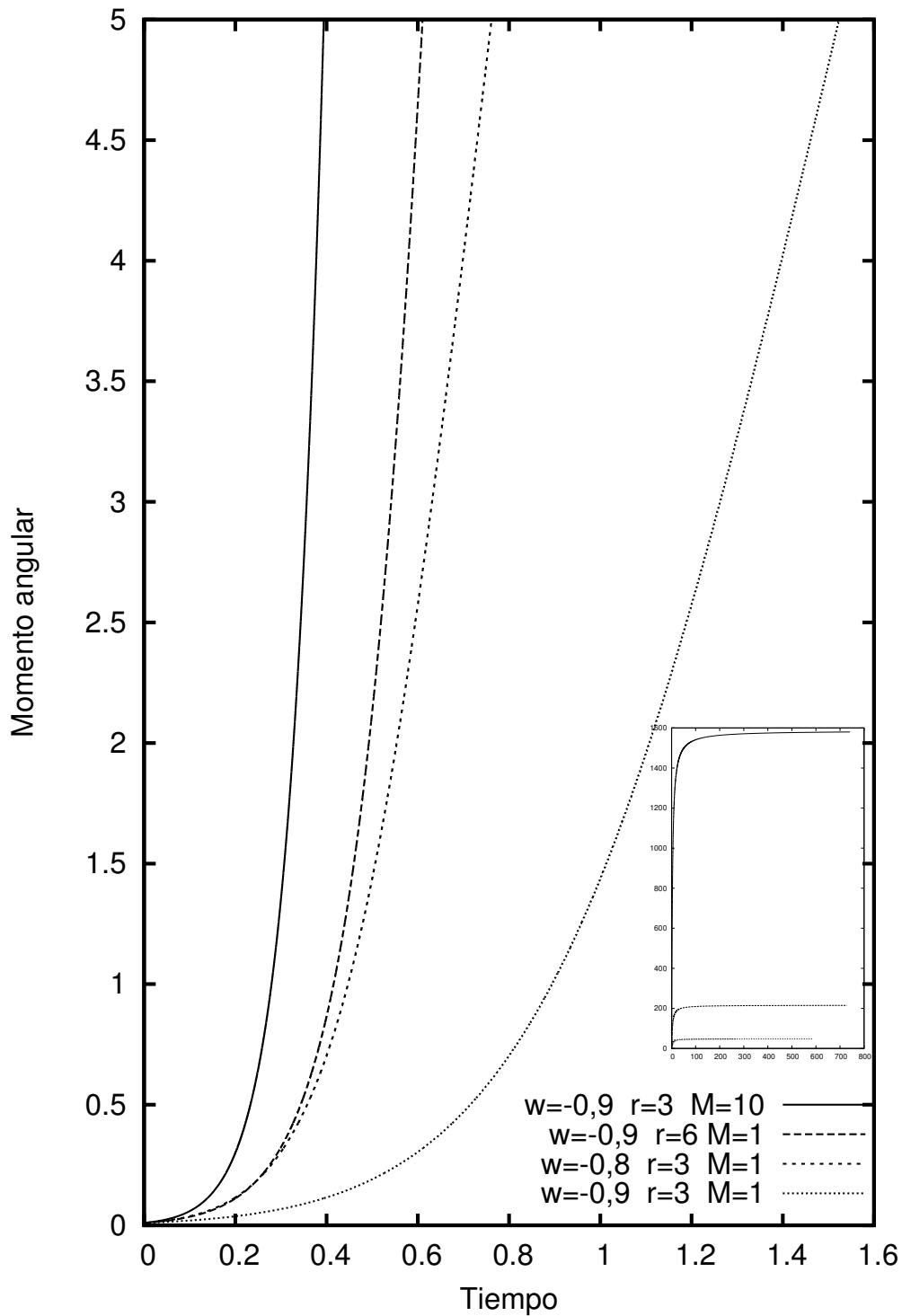


Figura 6.3: Esta figura muestra el comportamiento del momento angular de un agujero negro de Kerr-Newman con el tiempo cósmico en presencia de energía oscura con  $w = -0,8$  y  $w = -0,9$ . Se observa que cuanto mayor sea  $w$ ,  $r$  o  $M$ , más rápido es el aumento del momento angular. En la gráfica insertada podemos ver que  $J$  tiende a un valor constante para tiempos grandes en todos los casos estudiados.

Si  $w < -1$ , se observa que  $M, a$ , y  $J$  decrecen todas progresivamente desde sus valores iniciales, tendiendo a cero a medida que el universo se aproxima al big rip, donde los agujeros negros desaparecerán independientemente de los valores iniciales de su masa y momento angular [véase figuras 6.4, 6.5 y 6.6]. Esto generaliza el resultado obtenido por Babichev, Dokuchaev y Eroshenko [9, 10]. En el caso de un agujero negro cargado, el proceso de super-radiancia de la carga permite que el agujero negro emita la carga antes de que desaparezca. Se puede comprobar también que cuanto mayor sea  $|w < -1|$  más rápida es la disminución de  $M$  y  $J$ , y que para  $r$  grandes la evolución de la masa casi coincide con la evolución que se derivaría para el caso de Schwarzschild. Son también notables los resultados de que para mayores  $J$ , o menores  $r$ , más pequeña es la variación de la masa. La acreción de energía fantasma nos conduce también a una disminución de  $a$ , que se hace cero muy rápidamente; así,  $J$  debe disminuir también bastante más rápidamente de como lo hace  $M$ . Finalmente, se ha visto que para cualquier  $w$  la tasa de variación (aumento para  $w > -1$  y disminución para  $w < -1$ ) de  $J$  se acelera según se considera  $r$  o  $M$  más grande.

### 6.3.2. Gas de Chaplygin generalizado

Ahora derivaremos las expresiones para las tasas de variación  $\dot{M}, \dot{a}, \dot{J}$  en el caso de un gas de Chaplygin generalizado. Recuérdese que éste se puede describir como un fluido perfecto con ecuación de estado [20–24, 26, 27, 78, 79, 104]:

$$P = -A_{\text{ch}}/\rho^\alpha, \quad (6.31)$$

donde  $A_{\text{ch}}$  es una constante positiva y  $\alpha$  un parámetro. La conservación del tensor energía-impulso implica

$$\rho = \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (6.32)$$

con  $B \equiv (\rho_0^{\alpha+1} - A_{\text{ch}}) R_0^{3(\alpha+1)}$ . Ahora, de la ecuación de Friedmann obtenemos

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} R(t) \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right)^{1/[2(1+\alpha)]}. \quad (6.33)$$

De aquí [101],

$$R^{3(1+\alpha)} = \frac{B}{\left( \sqrt{\rho_0} - \sqrt{\frac{3}{8\pi A_M^2}} I(M) \right)^{2(1+\alpha)} - A_{\text{ch}}}, \quad (6.34)$$

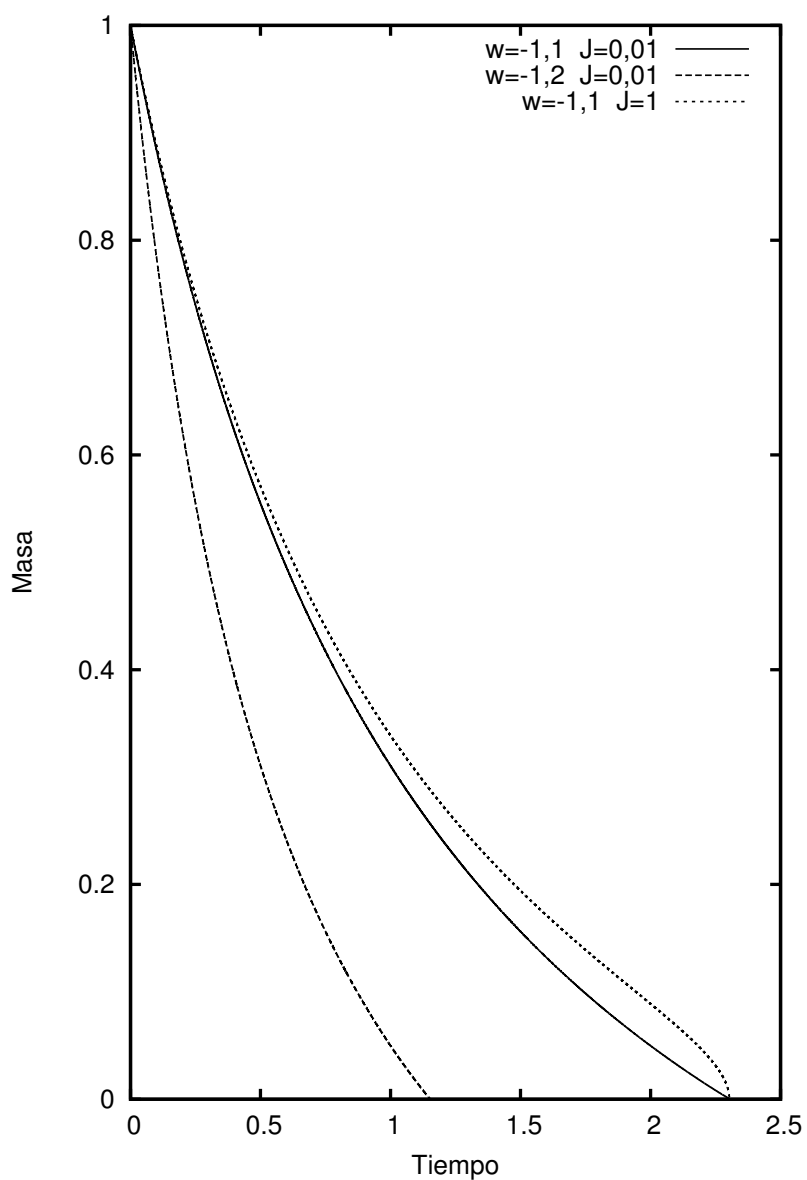


Figura 6.4: Esta figura muestra el comportamiento de la masa de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de energía fantasma con  $w = -1,1$  y  $w = -1,2$ . Se observa que cuanto mayor sea  $|w < -1|$  o menor  $J$ , más rápida es la disminución de la masa.

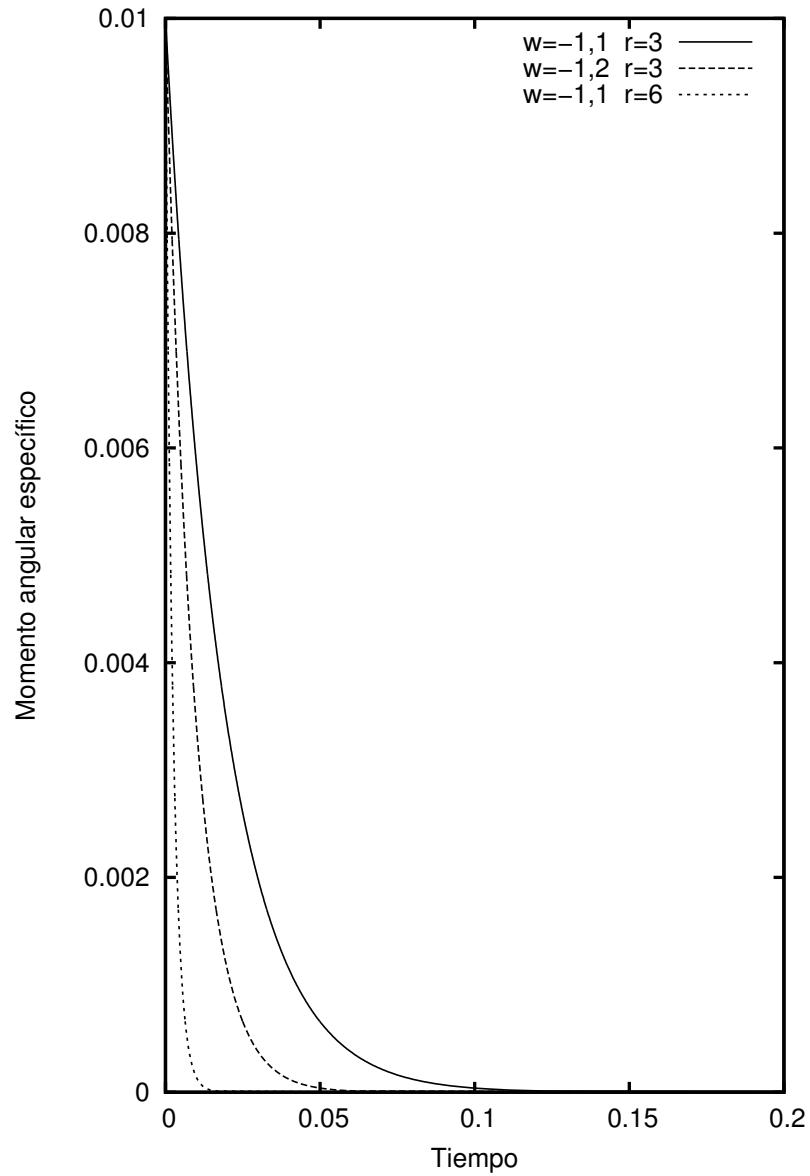


Figura 6.5: Esta figura muestra el comportamiento del momento angular específico de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de energía fantasma con  $w = -1,1$  y  $w = -1,2$ . Se observa que cuanto mayor sean  $|w < -1|$  o  $r$ , más rápido es la disminución del momento angular específico.



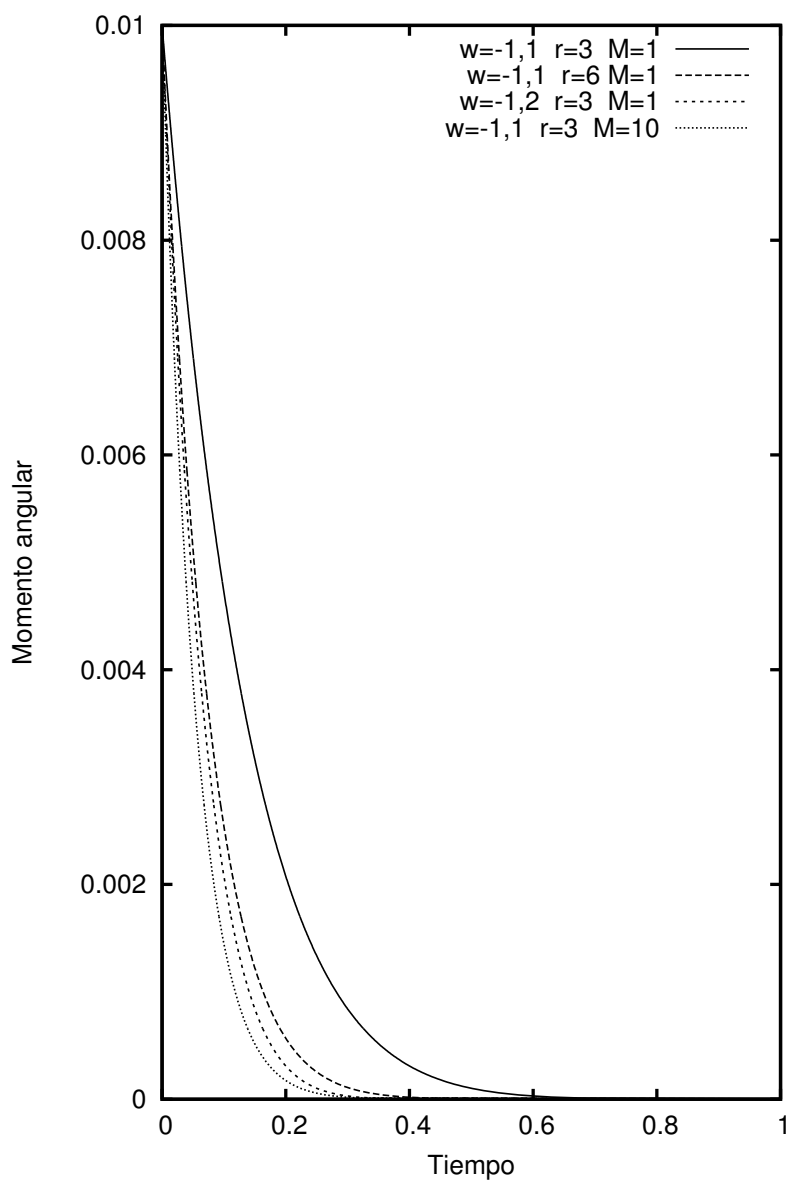


Figura 6.6: Esta figura muestra el comportamiento del momento angular de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de energía fantasma con  $w = -1,1$  y  $w = -1,2$ . Se observa que cuanto mayor sean  $|w < -1|$ ,  $r$  o  $M$ , más rápido es la disminución del momento angular.

$$R^{3(1+\alpha)} = \frac{B}{\left(\sqrt{\rho_0} - \sqrt{\frac{3}{2\pi^3 A_a^2}} I(a)\right)^{2(1+\alpha)} - A_{\text{ch}}}, \quad (6.35)$$

$$R^{3(1+\alpha)} = \frac{B}{\left(\sqrt{\rho_0} - \sqrt{\frac{6}{\pi}} I(J)\right)^{2(1+\alpha)} - A_{\text{ch}}}, \quad (6.36)$$

para  $M$ ,  $a$  y  $J$ , respectivamente. De nuevo para el caso donde se preserva la condición de energía dominante, es decir,  $B > 0$ , se obtiene que  $M$ ,  $a$  y  $J$  aumentan con el tiempo, tendiendo  $a$  y  $M$  a valores constantes para valores moderadamente grandes de  $B$ . Si  $B$  es suficientemente grande, entonces mientras  $M$  tiende a infinito,  $a$  se aproxima a un valor mayor pero todavía constante. Por otro lado, tanto  $M$  como  $a$  parecen aumentar más rápidamente según el parámetro  $\alpha$  se hace más pequeño, tendiendo  $M$  de nuevo a infinito si  $\alpha$  se toma suficientemente pequeño (es decir cercano a  $-1$ ). Respecto a la dependencia en  $r$  para  $B > 0$ , se ha comprobado que cuando  $r$  se hace muy pequeño,  $M$  y  $a$  quedan prácticamente congelados en sus valores iniciales. Por el contrario, para valores de  $r$  grandes, la evolución de  $M$  tiende a ajustarse a la de un caso de Schwarzschild, mientras  $a$  aumenta ahora de nuevo hasta un valor constante dado. Si se supone una violación de la condición de energía dominante, es decir,  $B < 0$ , entonces  $M$ ,  $a$  y  $J$  disminuyen con el tiempo, tendiendo  $a$  y  $M$  siempre a una constante mínima no nula. Valores mayores de  $|B|$ , o menores de  $\alpha$ , hace que la evolución sea más rápida y que los valores mínimos para  $M$  y  $a$  sean más pequeños pero todavía no nulos. La dependencia del proceso de evolución respecto de  $r$  en este caso es bastante similar al ya descrito para  $B > 0$ , es decir,  $M$  y  $a$  se mantienen casi en sus valores iniciales para valores muy pequeños de  $r$ , pero ambos disminuyen con el tiempo más rápidamente según se considera  $r$  mayor. También, una propiedad común para  $B > 0$  y  $B < 0$  es el hecho de que la evolución de  $M$  es apagada cuando se toman valores más grandes para el momento angular  $J$ .

Todos estos comportamientos se han comprobado a través de cálculos numéricos que proporcionan gráficas que en realidad son muy parecidas a las análogas correspondientes en el caso de quintaesencia [véase figuras 6.1-6.6] excepto (i) para el comportamiento de  $M$  con respecto el tiempo para valores moderados de  $B > 0$  y  $\alpha$  lejos de  $-1$  (en cuyo caso  $M$  tiende a un valor constante para  $t$  grande [véase figura 6.7] y (ii) para el comportamiento de  $M$  y  $a$  para valores moderados de  $B < 0$  y de  $\alpha \neq -1$  (en cuyos casos los parámetros estudiados tienden a valores constantes no nulos para tiempos  $t$  grandes [véase figura 6.8]).

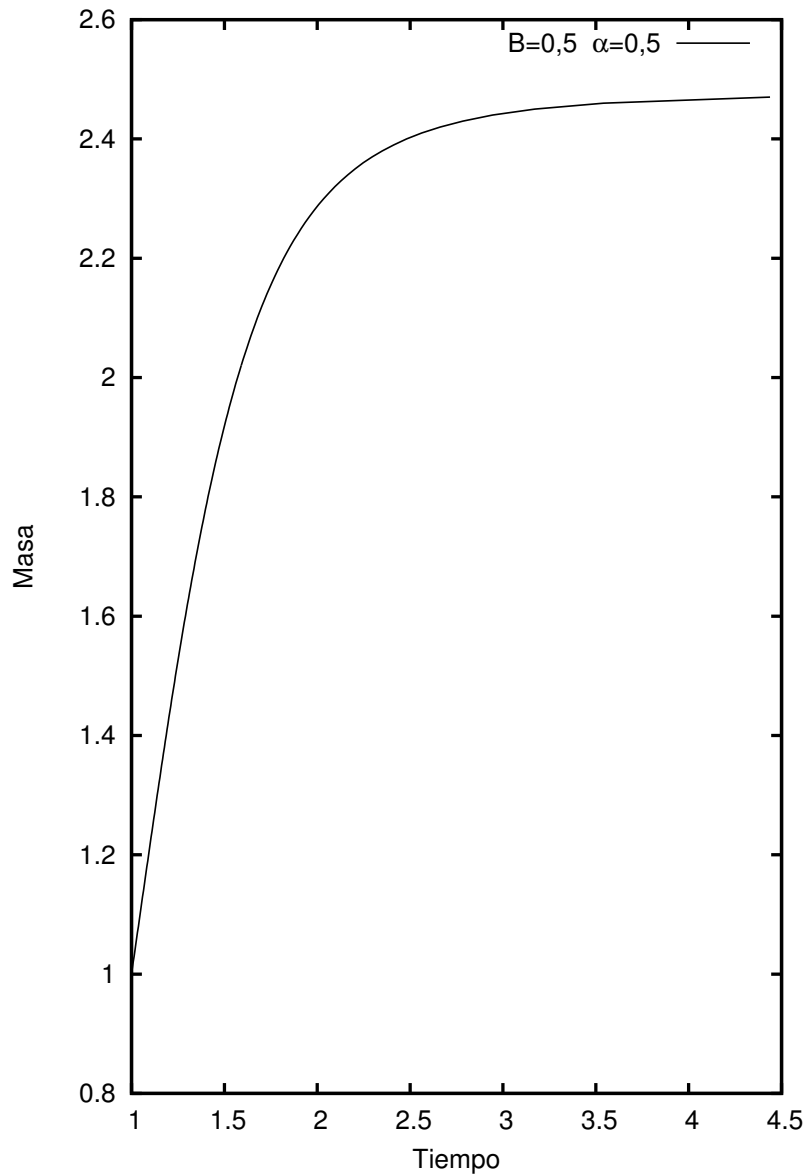


Figura 6.7: Esta figura muestra el comportamiento de la masa de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de un gas de Chaplygin generalizado con  $B = 0,5$  y  $\alpha = 0,5$ .

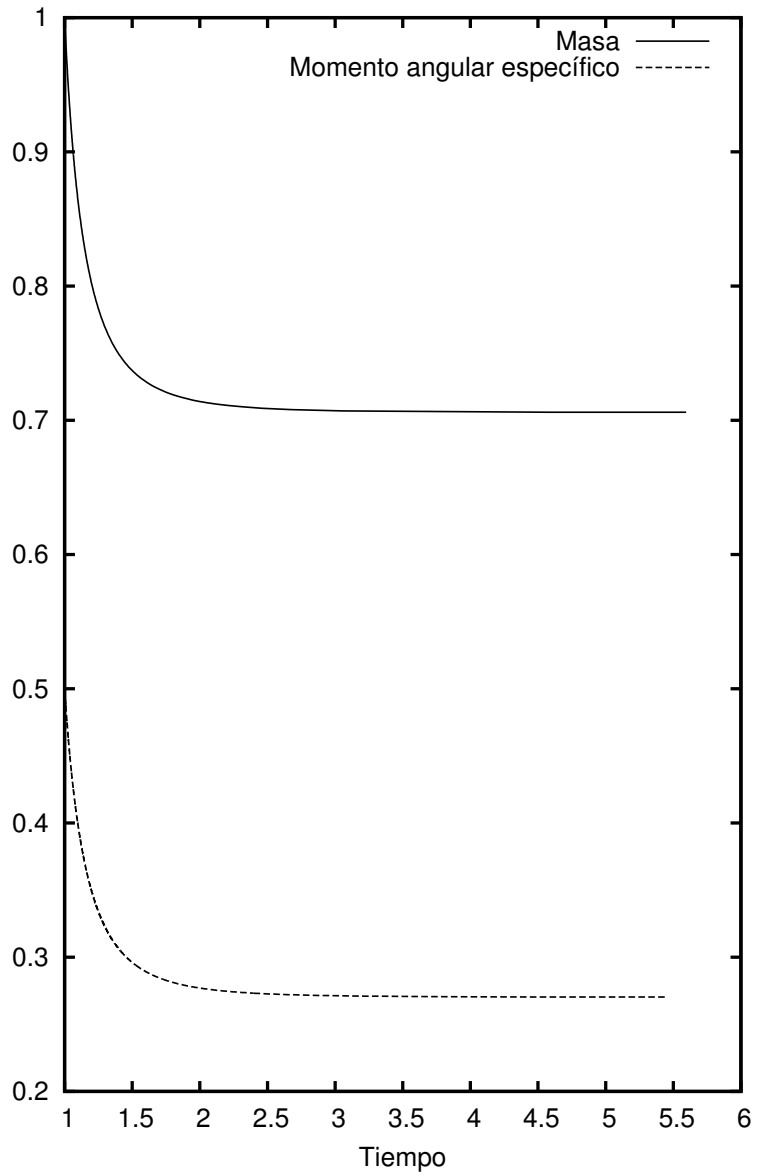


Figura 6.8: Esta figura muestra el comportamiento de la masa y del momento angular específico de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de un gas de Chaplygin generalizado (fantasma) con  $B = -0,5$  y  $\alpha = 0,5$ .

### 6.3.3. La conjetura de la censura cósmica y la super-radiancia

Es bien conocido que los agujeros negros poseen una singularidad espacio-temporal en  $r = 0$ . Sin embargo, esta singularidad se mantiene escondida detrás de su horizonte de sucesos; es decir, un observador fuera del agujero negro no podrá recibir señales desde la singularidad. Si una singularidad de este tipo no estuviera escondida detrás de un horizonte de sucesos, se convertiría en una singularidad desnuda. Se ha conjeturado que todas las singularidades están escondidas detrás de horizontes de sucesos; esto es, que no es posible la existencia de singularidades desnudas cuando la materia que se considera tiene propiedades razonables. Esta conjetura se llama “Conjetura de la censura cósmica” [136]. En el caso de una métrica de Kerr-Newman, la conjetura se mantiene siempre que se satisfaga la condición

$$Q^2 + a^2 \leq M^2. \quad (6.37)$$

En otro caso, el agujero negro de Kerr-Newman mostraría una singularidad desnuda. Es interesante estudiar si la acreción de energía oscura puede producir una singularidad desnuda en este caso. Como la acreción de energía oscura es un proceso gravitatorio, mientras el momento angular se ve afectado por la acreción, la carga eléctrica es invariante bajo este proceso. Antes hemos apuntado que cuando  $P + \rho > 0$ ,  $a$  y  $M$  aumentan con el tiempo durante la acreción de energía oscura. Aunque no tenemos una demostración formal de la violación de la censura cósmica en este caso, un análisis numérico realizado para la mayoría de los valores razonables de  $M$  y  $a$  parece indicar que el proceso de acreción de energía oscura viola la desigualdad (6.37) en la mayoría de las situaciones consideradas. En realidad, siempre existe un intervalo de tiempo inicial muy pequeño donde la conjetura se mantiene, excepto para el caso extremo donde  $Q^2 + a^2 = M^2$  [véase figura 6.9]. Así, tan pronto como el valor inicial de  $a$  se tome de manera que sea significativamente comparable con el de  $M$ , la conjetura se viola casi inmediatamente [véase figura 6.10]. En la sección siguiente discutiremos e interpretaremos las razones que conducen a esta violación.

Si la acreción involucra energía fantasma, entonces tanto  $a$  como  $M$  decrecen. En este caso, ya que la acreción no afecta al valor de la carga eléctrica, a primera vista, podría pensarse que cuando se alcancen valores suficientemente pequeños de  $a$  y  $M$ , la desigualdad (6.37) debería de dejar de satisfacerse, y de nuevo se violaría la conjetura de la censura cósmica. Sin embargo, también se podría esperar que la super-radiancia de la carga actuara de tal forma que disminuyera la carga durante la acreción de energía fantasma y así se siguiera satisfaciendo la desigualdad (6.37). Además, como  $M$  disminuye progresivamente, la temperatura del agujero negro aumentaría y se aceleraría la super-radiancia de la carga correspondiente. Nuestros cálculos numéricos parecen indicar que éste es el caso y que todos los efectos simultáneos sobre  $M$ ,  $a$  [véase figura 6.11] y  $Q$  debidos a la acre-

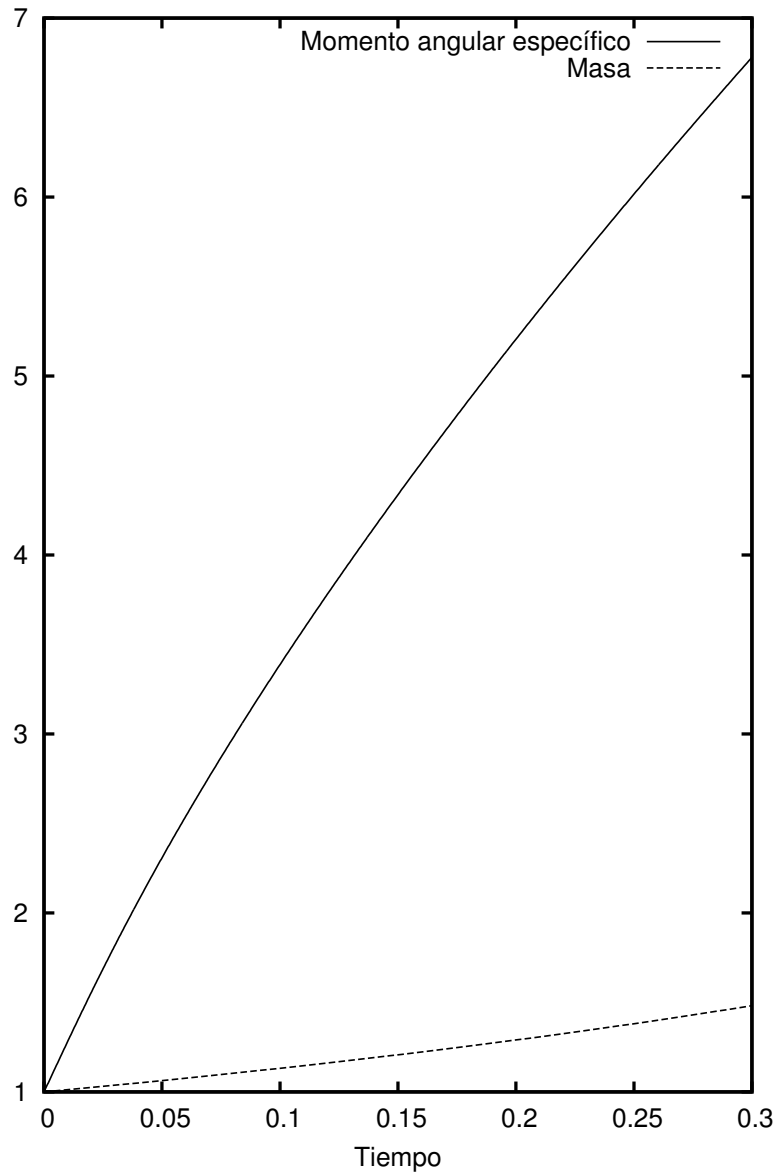


Figura 6.9: Evolución de un agujero negro de Kerr-Newman con energía oscura. Esta figura muestra el comportamiento de la masa y el momento angular específico de un agujero de Kerr-Newman extremo como una función del tiempo cósmico en presencia de energía oscura con  $w = -0,9$ . Es posible comprobar que la conjetura de la censura cósmica se viola.

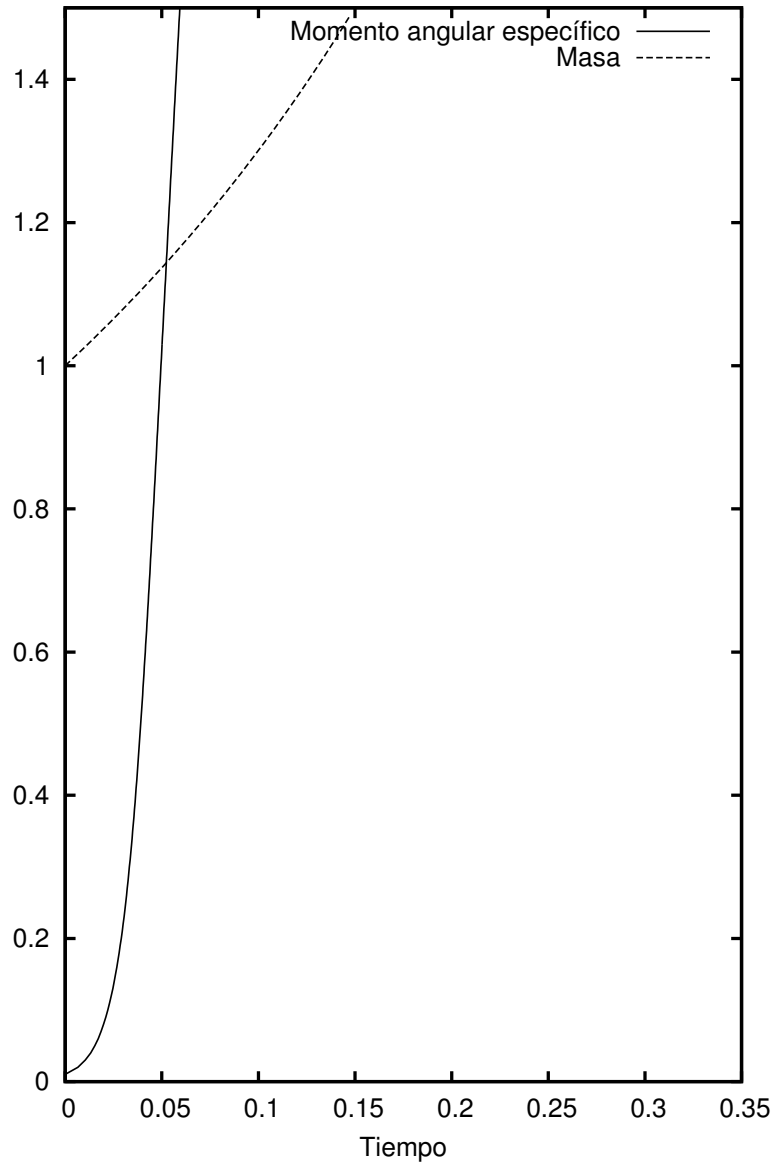


Figura 6.10: Evolución de un agujero de Kerr-Newman con energía oscura. Esta figura muestra el comportamiento de la masa y el momento angular específico de un agujero negro de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de energía oscura con  $w = -0,8$ . La separación entre las dos curvas disminuye según se aumenta el valor inicial de  $a$ . También se puede comprobar que existe un intervalo pequeño inicial de tiempo (en este caso hasta aproximadamente  $t = 0,05s$ ) donde todavía se satisface la conjetura.

ción de energía fantasma y  $Q$ -super-radiancia parecen conspirar de tal manera que la conjetura de la censura cósmica siempre resulta satisfecha. Obtener una expresión explícita y exacta para la relación entre la masa o la temperatura y la carga eléctrica es, sin embargo, una tarea que contiene ciertas sutilezas y por lo tanto requiere de más elaboración matemática. Este estudio se dejará para una consideración futura. No se ha considerado en este capítulo el proceso de super-radiancia del espín ya que el proceso de acreción de energía fantasma prevalece claramente sobre él.

## 6.4. Modelo aproximado

La violación de la censura cósmica por acreción de energía oscura en agujeros negros para  $w > -1$  es en realidad un resultado muy sorprendente, pero quizás no lo sea tanto como podrían llegar a ser ciertos comportamientos generales que consideraremos a continuación y que se refieren a los modelos de acreción considerados tanto para agujeros tipo Schwarzschild como Kerr-Newman. Una de tales características resulta por ejemplo de la ecuación (6.28), donde se puede ver que la masa del agujero negro “explota” en un tiempo finito en el futuro, cuando el tamaño del universo es todavía finito. Se sigue de ello que el agujero negro crecido de esta forma engulliría al universo entero en un tiempo finito en el futuro, una implicación que es de hecho bastante extraña, y que está también presente cuando se consideran agujeros negros sin rotación [9, 10]. Sin embargo, todas las predicciones que se han derivado para tiempos grandes podrían ser vistas como artefactos provenientes del hecho de que las métricas usadas para los agujeros negros en los procedimientos de acreción considerados son estáticas. Así, estos procedimientos poseen un carácter aproximado y serían estrictamente válidos sólo para un intervalo inicial de tiempo suficientemente corto. Los resultados obtenidos en este capítulo simplemente marcarían la tendencia de los diferentes parámetros involucrados una vez que comienza la evolución inicial, pero no podrían ser considerados como válidos para tiempos grandes, excepto asintóticamente.

Incluso en este caso, la violación de la censura cósmica cuando la energía oscura satisface una ecuación de estado con  $w > -1$  no puede justificarse, ya que la violación tiene lugar al inicio de la evolución para los agujeros negros extremos. Así, mientras que la evolución de agujeros negros inducida por la acreción de energía fantasma parece ser bastante razonable al menos para los periodos iniciales, en el caso de que se satisfaga la condición de energía dominante, la acreción en agujeros negros parece producir resultados bastante inesperados a lo largo de la evolución completa siguiente.



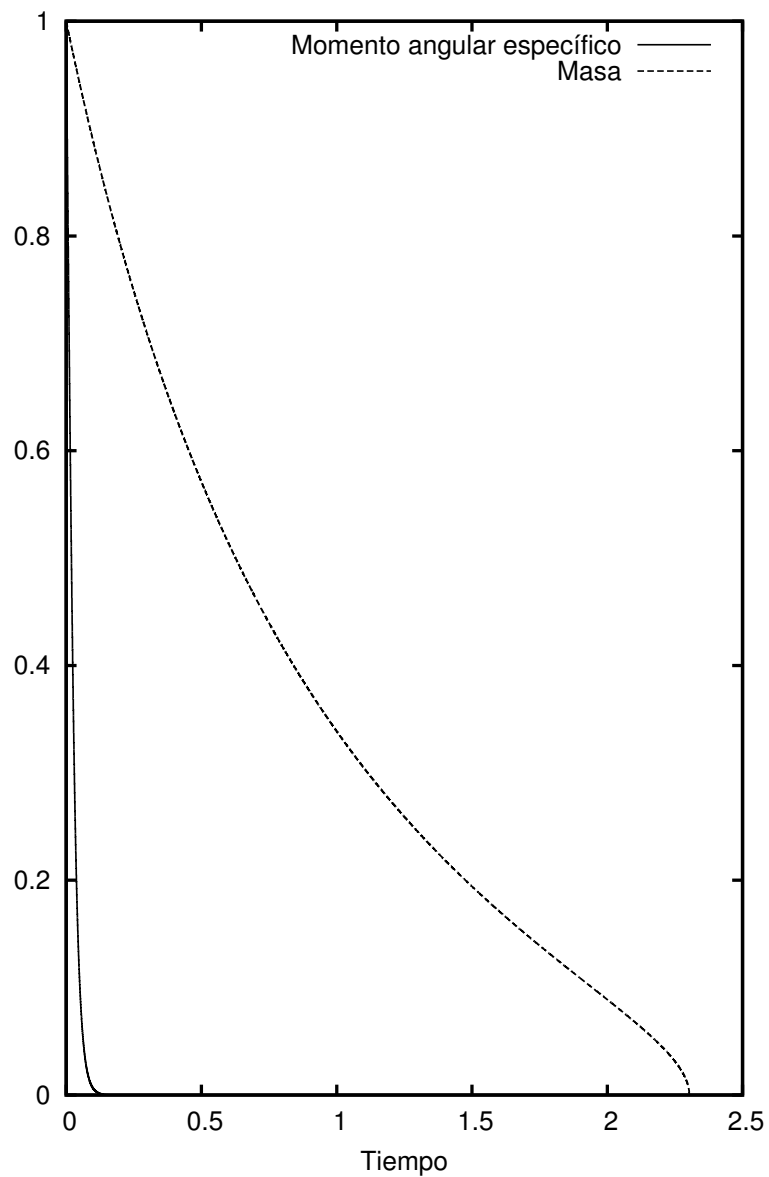


Figura 6.11: Evolución de un agujero negro extremo de Kerr-Newman con energía fantasma. Esta figura muestra el comportamiento de la masa y el momento angular específico de un agujero negro extremo de Kerr-Newman como una función del tiempo cósmico en presencia de energía fantasma con  $w = -1, 1$ . La separación entre las dos curvas aumenta según se considere el valor inicial de  $a$  más pequeño, o bien se haga  $r$  más grande.

## 6.5. Resumen y comentarios

En este capítulo hemos estudiado el comportamiento de la acreción de energía oscura en un agujero negro de Kerr-Newman. Primeramente, hemos generalizado el formalismo de acreción originariamente considerado en las referencias [9, 10] para el caso en el que el agujero negro tiene momento angular y carga eléctrica. Hemos aplicado tal formalismo a los campos de quintaesencia y K-esencia, así como al modelo del gas de Chaplygin generalizado. Hemos estudiado la evolución de la masa, momento angular específico y momento angular cuando se tiene energía oscura con  $w > -1$ . Se ha visto que todos estos parámetros ( $M$ ,  $a$ , y  $J$ ) aumentan con el tiempo cósmico debido a la acreción. El momento angular específico  $a$  aumenta hasta alcanzar un valor constante mientras que  $M$  no está acotada superiormente. También se ha comprobado, en este caso, que la acreción de energía oscura que verifica la condición de energía dominante permite encontrar situaciones donde se viola la conjetura de la censura cósmica. Existe otro rasgo incluso más sorprendente en este tipo de procesos: el hecho de que la masa del agujero negro “explota” en un tiempo finito y por lo tanto los agujeros negros se tragarían al universo entero en dicho tiempo. Estas dos predicciones podrían ser vistas, sin embargo, como artefactos provenientes del hecho de que la métrica de agujero negro usada en nuestro formalismo es estática. En realidad, el procedimiento usado para valores finitos de la coordenada radial se podría ver simplemente como una descripción aproximada que sería solamente y estrictamente válida para un intervalo de tiempo inicial suficientemente corto. Por lo que los resultados obtenidos sólo marcarían la tendencia de los parámetros considerados y podrían bien no ser válidos para tiempos grandes y valores finitos de  $r$ . Incluso si apelamos a la discusión anterior, el resultado de la violación de la censura cósmica cuando un agujero negro acreta energía oscura con  $w > -1$  no puede justificarse, ya que dicha violación ocurre también al principio de la evolución para agujeros negros extremos. Así, la acreción de energía oscura verificando  $P + \rho > 0$  en agujeros negros parece producir resultados bastante sorprendentes e inesperados.

Así pues, de lo dicho anteriormente se puede deducir que la conjetura de la censura cósmica estrictamente es válida sólo en la región asintótica.

Si la acreción involucra energía fantasma, entonces tanto  $a$  como  $M$  disminuyen desde sus valores iniciales, tendiendo a cero según nos vamos aproximando al big rip donde los agujeros negros desaparecen, independientemente de su masa y momento angular. En este caso ( $P + \rho < 0$ ), se preserva siempre la conjetura de la censura cósmica, ya que la super-radiancia de la carga y la acreción de energía fantasma se interrelacionan mutuamente de tal forma que producen este resultado.

Si las anteriores características se pueden considerar (o no) como argumentos que impliquen que la energía fantasma es una componente más consistente que la

energía oscura normal con  $w > -1$  es un tema que dependerá tanto de la consistencia intrínseca de los modelos como de los datos observacionales actuales y de aquellos que se puedan esperar en el futuro.

Antes de concluir este capítulo vamos a hacer un comentario sobre el modelo de acreción usado. Por una parte ya hemos dicho que el modelo debería considerarse como una aproximación a tasas de variación pequeñas debido al uso de una métrica estática. Aunque también tenemos que apuntar que existe otro motivo por el cual se debe considerar que el modelo es aproximado. En efecto, como ya indicamos en el capítulo 4, al acercarnos al big rip la densidad de energía fantasma y la curvatura tienden a divergir. Por ello, en situaciones suficientemente cercanas al big rip uno esperaría que empezaran a ser considerables los efectos cuánticos, por lo que la predicción del modelo consistente en la desaparición de los agujeros negros en el big rip se debe tomar con precaución, ya que los efectos cuánticos en esa zona no serían despreciables y podrían hacer que esta predicción no fuera cierta. Por ahora no tenemos una teoría cuántica de la gravedad y sería difícil introducir estos efectos cuánticos en el modelo. La precisión del modelo por este motivo es comparable a lo que ocurre en el proceso de evaporación de agujeros negros debido a la radiación Hawking, que también se debe de tomar como una aproximación cuando el tamaño del agujero se hace suficientemente pequeño, momento en el que se deberían introducir los efectos cuánticos en la fase final de la evaporación. Por todo esto, uno debe de considerar estos dos modelos (evaporación de agujeros negros y acreción de energía fantasma en agujeros negros) como una aproximación (clásica) debido a que en la fase final de su evolución se llega a regímenes donde los efectos cuánticos gravitatorios no serían despreciables y habría que tenerlos en cuenta.



## Capítulo 7

# Las cuerdas cósmicas con wiggles acretan energía oscura

Este capítulo trata sobre el estudio de la acreción con simetría cilíndrica de energía oscura con ecuación de estado  $P = w\rho$  en cuerdas cósmicas rectas con wiggles. Hemos obtenido que cuando  $w > -1$  la densidad lineal de energía en el corazón de la cuerda crece gradualmente hasta un valor máximo finito cuando el tiempo aumenta para todos los modelos de energía oscura considerados. En el régimen donde la condición de energía dominante se viola, se tiene que todos esos modelos predicen una disminución firme de la densidad lineal de energía de la cuerda cósmica según se va acretando energía fantasma. El estado final de la cuerda tras este proceso de acreción es una cuerda sin defectos de wiggles. Sin embargo, se puede argumentar que si la acreción de la energía fantasma procediera de una sucesión de pasos cuánticos, entonces el defecto podría continuar perdiendo densidad de energía lineal hasta un mínimo no nulo, el cual puede ser bastante más pequeño que el correspondiente a la cuerda sin perturbar.

### 7.1. Introducción

Un defecto topológico es una configuración estable de materia que se espera que se forme en una transición de fase del universo temprano. Esta configuración se encuentra en la fase simétrica o previa, que perdura después de que se complete una transición de fase a otra asimétrica o nueva.

Dependiendo de la naturaleza de la rotura de la simetría, se pueden formar distintos tipos de defectos topológicos según el mecanismo de Higgs-Kibble. Los más usuales son los monopolos magnéticos, cuerdas cósmicas, paredes de dominio y texturas.

Ya que el Universo se expandió y enfrió, las simetrías en las leyes de la Física

comenzaron a romperse, así, los defectos topológicos aparecieron en los lugares donde las diferentes regiones empezaron a entrar en contacto las unas con las otras. La materia en estos defectos se encuentra en la fase simétrica original, que persiste después de que se completara la transición a una nueva fase asimétrica.

Se pueden dar diferentes tipos de defectos topológicos, determinados por las propiedades de simetría de la materia y de la naturaleza de la transición de fase. Entre ellos tenemos:

- Paredes de dominio. Son membranas bidimensionales que se forman cuando se rompe una simetría discreta en una transición de fase. Estas paredes parecen los contornos de burbujas cerradas, dividiendo el universo en celdas. Tienen propiedades bastante peculiares, por ejemplo, el campo gravitatorio de una pared de dominio es repulsivo en lugar de atractivo.
- Cuerdas cósmicas. Líneas unidimensionales que se forman con la rotura de una simetría axial o cilíndrica. Las estudiaremos con más detalle en este capítulo.
- Monopolos. Defectos puntuales formados por rotura de una simetría esférica. Se piensa que pueden tener carga magnética norte o sur, por ello se les conoce comúnmente como monopolos magnéticos. La existencia de monopolos es una predicción de las teorías de la gran unificación.
- Texturas. Se forman cuando se rompe completamente el grupo de simetrías más grande y son inestables.

La clasificación de los defectos topológicos se puede realizar utilizando grupos de homotopía, es decir, si la simetría se rompe desde un grupo  $G$  a un subgrupo  $H$ , la variedad del vacío degenerado es  $\mathcal{M} \equiv G/H$ , y la topología de esta variedad determina el tipo de defecto que se puede formar. En particular, las cuerdas cósmicas se forman si  $\mathcal{M}$  no es simplemente conexa, es decir, si el primer grupo de homotopía o grupo fundamental  $\pi_1(\mathcal{M})$  es no trivial. En la tabla 7.1 podemos ver la clasificación de los defectos topológicos atendiendo al grupo de homotopía.

Ahora centrémonos en el estudio de las cuerdas cósmicas y el modo en que éstas acretan energía oscura. Como hemos dicho, las cuerdas cósmicas son defectos topológicos que pueden aparecer en teorías con una rotura espontánea de una simetría gauge local  $U(1)$ , durante transiciones de fase en el Universo primitivo. Las cuerdas cósmicas serían por tanto unos tubos muy delgados caracterizados por permanecer en el falso vacío previo a la transición. A estas cuerdas cósmicas se les asocia una densidad de energía por unidad de longitud  $\mu_0 = T_0 \sim \sigma^2$ , donde  $T_0$  es la tensión de la cuerda y  $\sigma$  la escala de la rotura de la simetría [105, 156, 157].

Defecto topológico	Dimensión	Clasificación
Paredes de dominio	2	$\pi_0(M)$
Cuerdas cósmicas	1	$\pi_1(M)$
Monopolos	0	$\pi_2(M)$
Texturas	-	$\pi_3(M)$

Tabla 7.1: Clasificación de los defectos topológicos atendiendo a los grupos de homotopía  $\pi_n(M)$ .

Típicamente, las cuerdas cósmicas han sido consideradas como posibles semillas para la formación posterior de estructura a gran escala del Universo [30, 160]. Es de destacar que la aparición de cuerdas como defectos topológicos en transiciones de fase ha sido observada experimentalmente en sistemas de materia condensada [106]. La posibilidad de experimentar en el laboratorio con los análogos de las cuerdas cósmicas ha hecho que el interés por estos objetos siga muy vivo en la actualidad. Hasta ahora, se han considerado dos clases generales de cuerdas cósmicas: cuerdas abiertas y cuerdas cerradas [105, 156, 157].

En este capítulo estudiaremos cómo las distintas formas de energía oscura son acretadas por cuerdas cósmicas. Nos centraremos en considerar solamente cuerdas cósmicas abiertas, y más precisamente, rectas. Éstas se describen usualmente por una métrica exterior espacio-temporal estática, descrita por primera vez por Vilenkin [154, 155]

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + dz^2 + (1 - 8G\mu_0)r^2 d\phi^2. \quad (7.1)$$

Definiendo una coordenada cilíndrica angular nueva  $\phi' = (1 - 8G\mu_0)\phi$ , se puede ver inmediatamente que esta métrica corresponde a un espacio-tiempo plano con una singularidad cónica que está asociada con un ángulo déficit dado por  $\Delta = 8\pi G\mu_0$ .

## 7.2. Flujo hacia el núcleo de una cuerda

Sin embargo, un flujo de energía entrante o saliente debido a la acreción de energía oscura no es estrictamente posible para la métrica exterior localmente plana que corresponde a una cuerda recta sin movimiento y sin wiggles [105, 156, 157]. De hecho, una cuerda sin movimiento y sin wiggles [105, 156, 157] no puede acretar nada que como en este caso, esté sin movimiento y sea homogéneo a su alrededor - en particular no puede acretar energía oscura. Así, si queremos considerar la acreción de energía oscura en cuerdas cósmicas necesitamos que esas cuerdas cósmicas estén perturbadas por wiggles. En este caso la métrica exterior

de la cuerda no viene dada por un elemento de línea localmente plano (7.1), ya que las variaciones inducidas por los wiggles en la masa por unidad de línea en la cuerda y la tensión convierten a estas cantidades en funciones dependientes del espacio-tiempo,  $\mu$  y  $T$ , con ecuación de estado  $\mu T = \mu_0^2$  y  $\mu > T$ , cuyos valores se pueden considerar inicialmente muy parecidos entre sí y por lo tanto muy parecidos a sus contrapartidos sin perturbar en la aproximación lineal [105, 156, 157]. La métrica de la cuerda perturbada con wiggles linealizada es [105, 156, 157]

$$ds^2 = - \left[ 1 + 4G(\mu - T) \ln \frac{r}{r_0} \right] dt^2 + dr^2 + \left[ 1 - 4G(\mu - T) \ln \frac{r}{r_0} \right] dz^2 + [1 - 4G(\mu + T)] r^2 d\theta^2, \quad (7.2)$$

que, contrariamente a la métrica (7.1), produce un potencial Newtoniano no nulo. En este caso el ángulo de déficit viene dado por  $4\pi G(\mu + T)$ .

Otra dificultad aparente relacionada con la anterior podría ser que, una vez la energía oscura alcanzara la vecindad del corazón de la cuerda, simplemente no se hundiera en el mismo. Se puede ver sin embargo que aunque la energía oscura se apilara cerca de la superficie del defecto sin fluir hacia su interior en el caso de una cuerda sin wiggles, podrá siempre producirse un flujo de energía oscura que entre en el interior de la cuerda perturbada, la cual podrá de esta forma acretar dicha energía. En efecto, para una cuerda cósmica suficientemente masiva sin perturbar, la métrica interior tiene la forma [80, 94]

$$ds^2 = -dt^2 + d\tilde{r}^2 + dz^2 + r_*^2 \sin^2 \frac{\tilde{r}}{r_*} d\phi^2, \quad (7.3)$$

con  $-\infty < t < \infty$ ,  $-\infty < z < \infty$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ ,  $0 \leq \tilde{r} \leq r_* \arccos(1 - 8G\mu_0)$ , y  $r_* = (8\pi G\varepsilon)^{-1/2}$ , donde  $\varepsilon = \text{constante}$  es la densidad uniforme de energía del interior del defecto hasta un radio cilíndrico  $\tilde{r}_0$ . El cambio de coordenadas  $r = r_* \sin(\tilde{r}/r_*)$  conduce entonces a una métrica exterior con

$$g_{rr} = (1 - r^2/r_*^2)^{-1}. \quad (7.4)$$

En tal caso, puede verse que el flujo entrante de energía oscura se expresa como

$$\Phi \propto g^{rr} T_{r0}|_{r=r_*}, \quad (7.5)$$

donde  $T_{r0}$  es la componente mixta del tensor energía-momento de la energía oscura. Claramente,  $\Phi = 0$  para una cuerda cósmica sin wiggles, donde no se producirá el fenómeno de acreción. Sin embargo, aunque la métrica interior correspondiente a una cuerda con wiggles será de nuevo dada en general por la ecuación (7.3), en este caso el parámetro  $r_*$  viene dado por

$$r_* = [8\pi G\varepsilon(\tilde{r})]^{-1/2} \quad (7.6)$$



y  $0 \leq \tilde{r} \leq r_* \arccos[1 - 4G(\mu + T)]$ . Así, en este caso, puesto que la densidad  $\epsilon$  depende ahora de  $w$ , el cambio de variable  $r = r_* \sin(\tilde{r}/r_*)$  conduce finalmente a un flujo no nulo de energía oscura a través de la superficie del defecto, hacia su interior, dado por

$$\Phi \propto T_{r0}(r = r_*) \frac{dr_*}{d\tilde{r}} \neq 0, \quad (7.7)$$

y así a una acumulación progresiva de energía oscura en el interior de la cuerda.

Hoy día, en cosmología, por otro lado, se confía sobre todo en la idea de que la energía total del Universo actual y posiblemente que en el Universo primordial (esto es en los dos periodos cósmicos que muestran expansión acelerada) es dominada por alguna forma de la llamada energía oscura [134]. Por esto, es de interés investigar los efectos que la energía oscura podría producir en las cuerdas cósmicas. Siguiendo los recientes estudios realizados en agujeros negros [9, 65, 77], uno puede efectivamente suponer que la energía oscura también puede acretarse en una cuerda cósmica, induciendo alguna variación en su densidad de energía por unidad de longitud  $\mu$ . Este capítulo apunta a considerar los efectos que la acreción de energía oscura pudiera tener en el destino de una cuerda cósmica recta con wiggles en un universo acelerado. Para ello usaremos un formalismo para poder abordar la acreción de energía oscura, descrita por cualquiera de los modelos estudiados en capítulos anteriores, en las cuerdas cósmicas rectas con wiggles. Obtendremos que cuando la energía oscura dada por quintaesencia o K-esencia es acretada en una cuerda cósmica recta perturbada, entonces la densidad de energía por unidad de longitud de la cuerda o bien crece progresivamente hasta un valor finito constante si  $w > -1$ , o bien disminuye ininterrumpidamente hasta el primer valor sin perturbar y entonces podría entrar en una región donde la acreción cuántica hiciera que alcanzara un valor mínimo, un poco antes de que ocurriera la singularidad del big rip si  $w < -1$ . El comportamiento de las cuerdas cuando acretan gas de Chaplygin es parecido: su densidad de energía por unidad de longitud crecen progresivamente o bien disminuye hasta un valor extremo, dependiendo de si se satisface la condición de energía dominante o no.

En la sección 7.3 se presenta el formalismo general para la acreción de energía oscura en una cuerda cósmica recta con wiggles y se obtiene una ecuación general para la variación de la densidad de energía por unidad de longitud del núcleo de la cuerda,  $\mu$ , en términos de la energía oscura interna, y se aplica tal formalismo a los campos cosmológicos de quintaesencia y K-esencia, y también al modelo del gas de Chaplygin generalizado. Se derivan expresiones aproximadas de  $\mu$  para los dos primeros modelos de energía oscura, para ambos casos  $w = P/\rho > -1$  y  $w = P/\rho < -1$ , analizando la correspondiente evolución de las cuerdas cósmicas. Finalmente se concluye con unos comentarios adicionales en la sección 7.4.

### 7.3. Acreción de energía oscura en cuerdas cósmicas rectas con wiggles

En lo que sigue estudiaremos cómo la teoría general de acreción se puede aplicar al caso en el que la energía oscura se acrete en cuerdas cósmicas con wiggles. Seguiremos el procedimiento general propuesto por Babichev, Dokuchaev y Eroshenko [9, 65] para el caso de agujeros negros de Schwarzschild, generalizándolo al caso de cuerdas cósmicas rectas con wiggles. Así, comenzaremos integrando la ley de conservación del tensor momento-energía usando la métrica exterior (7.2). Aunque para la métrica (7.1) solamente hay dos componentes de los símbolos de Christoffel no nulos,  $\Gamma_{\theta\theta}^r = -(1 - 8G\mu)r$  y  $\Gamma_{r\theta}^\theta = 1/r$ , cuando la cuerda está perturbada con wiggles, aparecen veintiuna componentes de los símbolos de Christoffel, lo que hace que los cálculos a realizar sean más complicados. En el caso de simetría cilíndrica tenemos la ley de conservación de la componente temporal del tensor momento-energía,  $T^{\nu}_{\mu;\nu} = 0$ ,

$$\sqrt{\mu}ru\sqrt{1-h_{00}}\sqrt{1-b}(1+h_{00})\sqrt{u^2-1}(P+\rho) = C, \quad (7.8)$$

donde

$$h_{00} = 4G(\mu - T) \ln(r/r_0) \quad (7.9)$$

$$b = 4G(\mu + T), \quad (7.10)$$

siendo  $r_0$  y  $C$  constantes de integración y  $u = dr/ds$ .

Al integrar la ley de conservación del tensor momento-energía proyectada sobre la cuatro-velocidad,  $u_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ , se obtiene

$$ur\sqrt{\mu(1-h_{00}^2)(1-b)}e^{\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho}{P+\rho}} = A, \quad (7.11)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $u$  debería ser positiva para un flujo de energía entrante en este caso, y  $A$  es una constante positiva. De las ecuaciones (7.8) y (7.11) obtenemos

$$\sqrt{(u^2-1)(1+h_{00})(P+\rho)}e^{-\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho}{P+\rho}} = C_2, \quad (7.12)$$

en la cual la constante  $C_2$  se expresa como  $C_2 = C/A = \hat{A}[\rho_\infty + P(\rho_\infty)]$ , siendo  $\hat{A} > 0$  una constante, para la simetría cilíndrica utilizada.

Integrando ahora la densidad de momento  $T_0^r$  sobre un elemento de línea circular del cilindro, podemos obtener la tasa de variación de la energía por unidad de longitud de la cuerda cósmica con wiggles, esto es

$$\dot{\mu} = - \int_0^{2\pi} r T_0^r d\phi = \int_0^{2\pi} r(P+\rho)(1+h_{00}) \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} d\phi. \quad (7.13)$$

Ahora consideramos la propiedad  $\sqrt{1+h_{00}}dt = \sqrt{\frac{dr^2}{ds^2} - 1}ds$  obtenida de la simetría cilíndrica usada y utilizando las ecuaciones (7.12) y (7.13) derivamos, finalmente, la ecuación relevante de la variación de la densidad de energía de una cuerda cósmica con wiggles [76]

$$\dot{\mu} = \frac{2\pi\bar{A}[\rho_\infty + P(\rho_\infty)]}{\sqrt{\mu(1-b)(1-h_{00}^2)}}, \quad (7.14)$$

donde  $\bar{A} = A\hat{A} > 0$  constante. Nótese que en el caso de una cuerda cósmica con métrica exterior plana y  $\mu = \mu_0$ , se tiene que  $\bar{A} = 0$  y, por tanto,  $\dot{\mu} = 0$ , dado que en tal caso la cuerda no induce la existencia de un potencial gravitatorio y no se produce el fenómeno de acreción. Por lo tanto, uno tiene la siguiente expresión integral que gobierna la evolución de la masa por unidad de longitud de la cuerda cósmica con wiggles

$$\int_{\mu_i}^{\mu} \sqrt{\mu(1-b)(1-h_{00}^2)}d\mu = 2\pi\bar{A} \int_{t_0}^t [\rho_\infty + P(\rho_\infty)] dt. \quad (7.15)$$

Es importante notar que las expresiones anteriores restringen por sí mismas el intervalo de valores permitidos para la cantidad  $\mu$ . De hecho, se obtienen las dos condiciones siguientes

$$\mu_0 < \frac{1}{8G} \quad (7.16)$$

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 64G^2\mu_0^2}}{8G} < \mu < \frac{1 + \sqrt{1 - 64G^2\mu_0^2}}{8G}. \quad (7.17)$$

La condición (7.16) no expresa nada más que la imposibilidad de que una cuerda cósmica supermasiva sin wiggles pueda alcanzar una densidad de energía lineal mayor que aproximadamente  $1/G$ . Incluso aunque los conceptos de radio y masa por unidad de longitud para una fuente del tipo del núcleo de una cuerda sólo se pueden definir de manera no ambigua [63], especialmente en la presencia de un fluido de energía oscura que interacciona, en el caso extremo supermasivo  $\mu = 1/8G$  se esperaría que la cuerda dejara de existir porque se corresponde con la situación donde toda la fase rota exterior está colapsada en el núcleo, dejando una fase pura de falso vacío en la que se pierde la situación de una cuerda cósmica con una región del núcleo atrapada [108, 132]. Cuando la cuerda está perturbada con wiggles entonces la condición (7.16) se refleja en la condición (7.17) en la que se ve que una cuerda cósmica con wiggles no puede exceder un valor máximo o ser menor que un mínimo dado no nulo. Si una cuerda cósmica tiene la densidad de masa lineal supermasiva extrema, entonces no puede tener perturbaciones tipo wiggles y no puede acretar ningún tipo de energía oscura.

Ahora, la integración de la parte izquierda de la ecuación (7.15) parece ser difícil de realizar y, de hecho, no hemos podido obtener una expresión integrada en forma cerrada. Sin embargo, en los casos relevantes físicamente en los que  $\mu$  está muy próximo a  $\mu_0$  y/o  $r$  está muy cercano a  $r_0$ , ese término se puede integrar aproximadamente dando [76]

$$\begin{aligned} & \int_{\mu_i}^{\mu} d\mu \sqrt{\mu(1-b)(1-h_{00}^2)} \simeq I(\mu) = \\ & = \left[ \frac{8G\mu - 1}{16G} \sqrt{-4G\mu^2 + \mu - 4G\mu_0^2} \right. \\ & \left. + \frac{64G^2\mu_0^2 - 1}{64G^{3/2}} \arcsen \left( \frac{1 - 8G\mu}{\sqrt{1 - 64G^2\mu_0^2}} \right) \right] \Bigg|_{\mu_i}^{\mu}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

La integración de la parte derecha de la ecuación (7.15) la vamos a realizar en la sección siguiente para los distintos modelos de energía oscura considerados en los capítulos 2 y 3.

### 7.3.1. Quintaesencia y K-Esencia

Recuérdese que si comenzamos con la ecuación de estado  $P = w\rho$ , donde  $w$  se considera constante, podemos usar la conservación de la energía cósmica para obtener

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3(1+w)}, \quad (7.19)$$

donde  $\rho_0$  y  $R_0$  son constantes de integración. De aquí

$$2\pi\bar{A} \int_{t_0}^t [\rho_{\infty} + P(\rho_{\infty})] dt = 2\pi\bar{A}(1+w)\rho_0 R_0^{3(1+w)} \int_{t_0}^t dt R^{-3(1+w)}. \quad (7.20)$$

Entonces, para el factor de escala  $R(t) = R_0 \left( 1 + \frac{3}{2}(1+w)C^{1/2}(t-t_0) \right)^{2/[3(1+w)]}$  donde  $C = 8\pi G\rho_0/3$ , correspondiente a un universo plano con quintaesencia general tenemos

$$t = t_0 + \frac{I(\mu)}{(1+w) \left( 2\pi\bar{A}\rho_0 - \frac{3}{2}C^{1/2}I(\mu) \right)}, \quad (7.21)$$

donde  $I(\mu)$  está definido en la ecuación (7.18). Esta es una ecuación paramétrica de la que se obtiene la forma en que la energía por unidad de longitud de una cuerda cósmica con wiggles evoluciona en un universo con expansión acelerada.

Así, si  $w > -1$  vemos que la energía de la cuerda en el núcleo aumenta progresivamente desde su valor inicial  $\mu_i$ , tendiendo a un valor máximo

$$\mu_{\max} = \frac{1 + \sqrt{1 - 64G^2\mu_0^2}}{8G}. \quad (7.22)$$

Cuanto mayor sea  $w$ , menor es el tiempo requerido por el proceso de acreción para hacer que la cuerda alcance  $\mu_{\max}$ . Si  $w < -1$ , es decir, si nos encontramos en un régimen fantasma, entonces la densidad de energía en el núcleo de la cuerda disminuirá rápidamente desde su valor inicial hasta recuperar su valor sin perturbar  $\mu_0$ . Cuanto más pequeño sea  $w$ , más corto es el tiempo necesario para que el sistema alcance el valor  $\mu_0$ . Según la cuerda se aproxima a este valor, el potencial gravitatorio se hace cada vez más pequeño hasta anularse finalmente en  $\mu_0$ , así que el proceso de acreción clásica se detendrá en este punto. Se puede comprobar que tal comportamiento también ocurre en el caso de que se acrete K-energía fantasma.

Sin embargo las dos clases de energía fantasma consideradas plantean una interesante cuestión. Incluso, aunque el proceso de acreción continuo clásico sólo puede proceder hasta llegar a  $\mu_0$ , si suponemos que la acreción de energía fantasma ocurriera en pasos discretos, entonces el límite  $\mu_0$  podría superarse y la densidad de energía lineal del núcleo de la cuerda continuaría disminuyendo por debajo de  $\mu_0$  ya que se está acretando energía fantasma. Se podría alcanzar de esta forma un régimen donde  $T > \mu$  el cual acabaría cuando  $\mu$  alcanzara el valor mínimo

$$\mu_{\min} = \frac{1 - \sqrt{1 - 64G^2\mu_0^2}}{8G}, \quad (7.23)$$

que nunca sería cero ya que  $\mu_0 > 0$ . La métrica espacio-temporal de la cuerda cósmica dada por la ecuación (7.2) intercambiaría entonces los valores entre las componentes  $tt$  y  $zz$ , ya que en este caso  $\mu < T$ .

### 7.3.2. Gas de Chaplygin generalizado

Ahora obtendremos la expresión para la variación  $\dot{\mu}$  en el caso de un gas de Chaplygin generalizado. Comenzaremos recordando la expresión de la densidad de energía

$$\rho = \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (7.24)$$

que ha sido obtenida integrando la ley de conservación cósmica para el caso de la ecuación de estado de un gas de Chaplygin generalizado, esto es  $P = -A_{\text{ch}}/\rho^\alpha$ .

Ahora, de la ecuación de Friedmann obtenemos

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} R(t) \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right)^{1/[2(1+\alpha)]}. \quad (7.25)$$

Luego, de la ecuación (7.18) se llega a

$$\begin{aligned} I(\mu) &= B\bar{A} \sqrt{\frac{3\pi}{2G}} \int_{R_0}^R \frac{\frac{1}{R^{3(1+\alpha)}}}{R \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right)^{(2\alpha+1)/[2(1+\alpha)]}} dR \\ &= -\bar{A} \sqrt{\frac{2\pi}{3G}} \left[ \left( A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right)^{1/[2(1+\alpha)]} - \sqrt{\rho_0} \right]. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Se obtiene entonces

$$R^{3(1+\alpha)} = \frac{B}{\left( \sqrt{\rho_0} - \frac{\sqrt{3G}}{2\pi A} I(\mu) \right)^{2(1+\alpha)} - A_{\text{ch}}}. \quad (7.27)$$

De nuevo en este caso, si consideramos una constante  $B > 0$ , se produce un aumento progresivo de  $\mu$  con  $R$  hasta el máximo dado por  $\mu_{\text{max}}$ , y la hipótesis de una constante  $B < 0$  (fantasma) conduce a una disminución de  $\mu$  con  $R$  hasta  $\mu_0$  (en caso clásico) o hasta  $\mu_{\text{min}}$  si se supone que la energía Chaplygin fantasma se acreta en pasos discretos.

## 7.4. Resumen y comentarios

Mientras las cuerdas cósmicas tienen una larga tradición e incidencia en cosmología teórica, la introducción de la energía oscura ha tenido lugar bastante más recientemente con no menos incidencia o sorpresa. Quizás, por ello su potencial relación mutua e interacciones no ha sido todavía considerada. Este capítulo es el primer paso en la tarea de estudiar los efectos que la presencia de energía oscura pudiera tener en el destino de la cuerda cósmica en un universo con expansión acelerada. Aquí nos hemos limitado a estudiar simplemente un modelo aproximado para describir cómo la cuerdas cósmicas rectas con wiggles acretan energía oscura durante la expansión acelerada del universo, dejando para trabajos futuros el estudio exacto tanto para cuerdas rectas con wiggles como para cuerdas circulares, así como los efectos cinemáticos que la aceleración del universo podrían tener en la forma y el tamaño de cualquier cuerda cósmica. Primeramente se ha construido y adaptado una descripción generalizada al caso de la acreción con simetría cilíndrica de energía oscura en cuerdas cósmicas rectas. Esta descripción

está basada en la integración de las leyes de conservación para el tensor momento-energía y a su proyección sobre la cuatro-velocidad usando la geometría exterior de una cuerda cósmica con wiggles. Hemos considerado la acreción de energía oscura en cuerdas cósmicas rectas usando varios modelos de campos escalares para el vacío cosmológico, denominados modelos de quintaesencia y K-esencia con ecuación de estado  $P = w\rho$ , y un modelo generalizado de gas de Chaplygin con una ecuación de estado inusual  $P = -A_{\text{ch}}/\rho^\alpha$ . Se ha derivado una ecuación de variación para la densidad de energía por unidad de longitud de las cuerdas, y finalmente se ha integrado para cada uno de estos modelos de energía oscura. Esto último permite predecir que, siempre que la densidad de energía del vacío cósmico disminuye con el tiempo, la densidad de energía lineal de las cuerdas rectas crece progresivamente según el universo se hace más grande para todos los modelos de energía oscura; si la densidad de energía del universo crece con la expansión, induciendo una violación universal de la condición de energía dominante, la densidad de energía de la cuerda disminuye ininterrumpidamente. Esa disminución de la densidad de energía hace que las cuerdas lleguen a estar eventualmente libres de wiggles para obtener después de ello un régimen de acreción cuántico donde la densidad de energía de la cuerda alcanza finalmente un valor mínimo no nulo, antes de la ocurrencia de cualquier singularidad futura tipo big rip.

Parece que el valor actual del parámetro  $w$  en la ecuación de estado del Universo tiene que ser menor que  $-1$ . Así, uno podría estar tentado a pensar que la evolución anterior de cuerdas cósmicas permitiendo eventualmente la formación de defectos topológicos exóticos con perturbaciones wiggles-negativas podría ser inevitable. Sin embargo, teniendo ahora  $w < -1$  (esto parece ser así, al menos es el caso más favorecido por las observaciones) no se garantiza en absoluto que el régimen fantasma persista en el futuro. De hecho, las descripciones más generales de campos de quintaesencia están basados en modelos tracking donde el parámetro  $w$  es dependiente del tiempo [31, 150, 167] y, por lo tanto, podría bien ser ahora menor que  $-1$  pero después llegar a ser mayor que  $-1$ , haciendo así inaplicable en un futuro lejano la evolución de la cuerda cósmica predicha por nuestros modelos de  $w$  constante. Sin embargo, la evolución inicial de la cuerda implicada por nuestros modelos fantasmas parece probable. Ese comportamiento en sí podría ser todavía bastante importante para una variedad de temas. Pero incluso tal comportamiento podría no estar garantizado ya que los campos fantasmas están caracterizados por Lagrangianos que contienen un término cinético negativo, lo que les confiere propiedades extrañas y permite la existencia de inestabilidades indeseadas [39], haciendo así problemático el escenario fantasma.





# Capítulo 8

## Conclusiones

El objetivo fundamental de este trabajo es estudiar las características matemáticas y físicas de distintos modelos para la energía oscura, así como investigar las interacciones de dicha energía oscura con objetos de interés en astronomía.

Las conclusiones más importantes a las que ha dado lugar nuestro trabajo son las siguientes:

1. Nuestro estudio general de la energía oscura nos ha permitido encontrar nuevas soluciones cosmológicas en modelos tipo quintaesencia y gas de Chaplygin generalizado para diversas ecuaciones de estado. Estas nuevas soluciones se refieren a: geometrías abiertas y cerradas en el caso de un modelo general de quintaesencia, y geometría plana para un acoplo conforme del campo escalar a la gravedad y de un gas de Chaplygin generalizado. Todas estas soluciones poseen una característica matemática común que consiste en que todas ellas expresan en forma implícita el factor de escala del universo en términos de funciones hipergeométricas.
2. Se han fijado condiciones sobre los parámetros que definen la ecuación de estado de un gas de Chaplygin generalizado para que éste viole la condición de energía dominante y represente así una energía fantasma tipo Chaplygin. Dichas condiciones revierten en la implicación de que la constante que aparece en la ecuación de conservación de la energía integrada sea negativa.
3. Si la ecuación de estado de un universo dominado por energía oscura corresponde a la de un gas de Chaplygin generalizado, la energía oscura admite una descripción en términos de un campo escalar tipo Born-Infeld generalizado, o un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad. En estos casos es posible obtener un modelo fenomenológicamente viable.
4. Cuando se modela la energía oscura en la forma de un gas de Chaplygin generalizado que viola la condición de energía dominante, la solución cósmica

correspondiente no muestra ninguna singularidad de curvatura tipo big rip en un tiempo finito del futuro a diferencia de lo que ocurre en los demás modelos. Cualquiera que sea la geometría del universo en este caso, la solución cósmica siempre tiende a la que corresponde a un universo tipo de Sitter asintóticamente.

5. En cualquier modelo de energía fantasma se generan las condiciones adecuadas para la formación de túneles espacio-temporales denominados agujeros de gusano. Cuando se permiten procesos de acreción de esta energía fantasma en dichos agujeros se predicen fenómenos tipo big trip (inflación catastrófica de la garganta del agujero de gusano) en el futuro, excepto en el caso de que la energía fantasma venga modelada por un gas de Chaplygin generalizado. En tal caso, sólo existe un dominio extremadamente reducido en el espacio de parámetros que pudiera permitir la aparición del fenómeno big trip. Cuando un agujero de gusano acreta energía oscura que preserva la condición de energía dominante, sufre un proceso de aniquilación progresiva en cualquiera de los casos considerados.
6. Se ha construido un modelo de inflación primordial consistente usando un campo de energía fantasma que satisface todos los requerimientos, aunque no contiene un mecanismo inmediato para la salida de la fase inflacionaria. Esta salida pudiera relacionarse sin embargo con la especulación de que tuviera lugar un fenómeno de big trip en el contexto de un escenario tipo multiverso.
7. Se ha generalizado el mecanismo de acreción de energía oscura debido a Babichev, Dokuchaev y Eroshenko al caso de agujeros negros con carga eléctrica y momento angular, incluyendo ecuaciones generales para la variación de dichas magnitudes en las leyes de conservación del tensor energía-impulso y su proyección sobre la cuatro-velocidad. En principio, el formalismo obtenido puede, en general, considerarse como una muy buena aproximación para tasas de variación de las magnitudes que caracterizan al agujero negro suficientemente pequeñas.
8. Mientras que los agujeros negros con momento angular incrementan esta magnitud y su masa de forma en general lenta y progresiva al acretar energía oscura, la presencia de energía fantasma hace que el momento angular y la masa de un agujero negro tipo Kerr disminuyan de forma progresiva hasta anularse en el big rip, en un proceso que: (i) prevalece sobre la evaporación térmica de Hawking y la superradiancia; y (ii) establece una “democracia” entre todos los tipos de agujeros negros, independientemente de sus masas y momentos angulares iniciales, en las proximidades del big rip, de acuerdo con la cual dichos agujeros negros se hacen todos indistinguibles en tales circunstancias.

9. La acreción de energía oscura con ecuación de estado  $P = wp$ ,  $w > -1$ , sobre agujeros negros de tipo Kerr-Newman da lugar a situaciones en las que se produce una violación de la conjetura de la censura cósmica, incluso a tiempos suficientemente tempranos, en agujeros negros casi extremos.
10. Existe una posibilidad de que cualquier agujero negro en presencia de energía oscura con ecuación de estado constante pueda eventualmente sufrir un proceso de inflación tan rápido que conduzca a una situación final para el universo en la que éste resulte engullido por dicho agujero negro.
11. Las cuerdas cósmicas sólo pueden acretar energía oscura cuando están perturbadas por los llamados “wiggles” que discurren a través de las mismas dando lugar a un potencial gravitatorio no nulo. Estos “wiggles” hacen aparecer componentes no nulas del tensor energía impulso que generan procesos de flujo energético hacia el interior de la cuerda.
12. En el caso de que la ecuación de estado de la energía oscura corresponda a un parámetro  $w$  mayor que  $-1$ , la densidad lineal de energía de las cuerdas cósmicas aumenta progresivamente hasta alcanzar un valor máximo que corresponde a una cuerda supermasiva, a partir del cual la cuerda se disuelve en la fase con simetría rota. Si  $w < -1$ , la energía concentrada en el núcleo del defecto topológico disminuye progresivamente hasta que la perturbación “wiggly” desaparece. A partir de este momento la cuerda deja de acretar energía oscura, al menos clásicamente.
13. Todos los modelos de energía oscura considerados en esta memoria presentan ciertas virtudes, pero también tienen inconvenientes. El modelo usual de quintaesencia da lugar a una formulación consistente, pero viola la conjetura de la censura cósmica en agujeros negros de Kerr casi extremos y permite la posibilidad de que el universo sea tragado por un agujero negro. La energía fantasma no presenta estos problemas, parece conformarse mejor a los datos observacionales y puede proporcionar un modelo de inflación primordial, pero da lugar a singularidades tipo big rip y big trip, términos cinéticos del campo negativos e inestabilidades. Finalmente, el gas de Chaplygin generalizado evita todas las singularidades y permite formular un modelo unificado que describe a la vez a energía y materia oscuras, pero es un modelo que presenta también inestabilidades difíciles de resolver.
14. La consideración de la energía oscura como causa de la expansión acelerada del Universo corresponde sólo a una de las posibles explicaciones de tal fenómeno. Una modificación adecuada de la gravedad que se manifestara sólo a tiempos tardíos no puede aún ser descartada.



# Apéndice A

## Funciones hipergeométricas

Una función (o serie) hipergeométrica se define como una serie de la forma

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) &= 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdot 1 \cdot 2} z^2 \\ &+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $z$  son números complejos.

Una serie hipergeométrica es finita si  $\alpha$  o  $\beta$  son enteros negativos o cero. Para  $\gamma = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) la serie hipergeométrica es indeterminada si ni  $\alpha$  ni  $\beta$  es igual a  $-m$  (donde  $m < n$  es un número natural). Sin embargo,

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow -n} \frac{{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)}{\Gamma(\gamma)} &= \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n)\beta(\beta+1) \dots (\beta+n)}{(n+1)!} z^{n+1} \\ &\times {}_2F_1(\alpha+n+1, \beta+n+1; n+2; z) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde  $\Gamma(\gamma)$  es la función Gamma.

Si excluimos estos valores de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\gamma$ , una función hipergeométrica converge en el círculo unidad  $|z| < 1$ .  ${}_2F_1$  tiene en este caso un punto de ramificación en  $z = 1$ . Se tienen las condiciones siguientes para la convergencia en la circunferencia unidad:

1.  $1 > \text{Re}(\alpha + \beta - \gamma) \geq 0$ . La serie converge en toda la circunferencia unidad excepto en el punto  $z = 1$ .
2.  $\text{Re}(\alpha + \beta - \gamma) < 0$ . La serie converge (absolutamente) en toda la circunferencia unidad.
3.  $\text{Re}(\alpha + \beta - \gamma) \geq 1$ . La serie diverge en toda la circunferencia unidad.



## Apéndice B

### Expresión explícita de $R_{\min}$

La ecuación de Friedmann (3.6) para  $K = 1$  se puede expresar como  $H^2 = f(R)$  donde

$$f(R) = -1/R^2 + D \left[ A_{\text{ch}} + \frac{B}{R^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (\text{B.1})$$

La función  $f(R)$  tiene una única raíz positiva que la denotaremos por  $R_{\min}$ . Se corresponde con el radio mínimo de un universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker lleno por un gas de Chaplygin generalizado con  $B$  negativa y  $-1 < \alpha$ . La expresión explícita de  $R_{\min}$  depende del parámetro [1]

$$Q \equiv \frac{B^2}{4A_{\text{ch}}^2} - \frac{D^{-3(1+\alpha)}}{27A_{\text{ch}}^3}. \quad (\text{B.2})$$

Para valores positivos de  $Q$ , es decir,  $(27/4)D^{3(1+\alpha)}A_{\text{ch}}B^2 > 0$ ,  $R_{\min}$  queda como

$$R_{\min} = \left[ \left( -\frac{B}{2A_{\text{ch}}} + \sqrt{Q} \right)^{\frac{1}{3}} + \left( -\frac{B}{2A_{\text{ch}}} - \sqrt{Q} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (\text{B.3})$$

Para  $Q = 0$ , esto es,  $B^2 = 4/(27D^{3(1+\alpha)}A_{\text{ch}})$ ,  $R_{\min}$  es

$$R_{\min} = \frac{1}{\sqrt{D}} \left( \frac{4}{3A_{\text{ch}}} \right)^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}. \quad (\text{B.4})$$

Finalmente, si  $(27/4)D^{3(1+\alpha)}A_{\text{ch}}B^2 < 0$ ; es decir, valor negativo de  $Q$ ,  $R_{\min}$  se puede expresar como

$$R_{\min} = \left[ 2\rho^{1/3} \cos \left( \frac{\theta}{3} \right) \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (\text{B.5})$$

donde

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{\sqrt{27D^{3(1+\alpha)}A_{ch}^3}}, \\ \theta &= \arctan \sqrt{-1 + \frac{4}{27D^{3(1+\alpha)}A_{ch}B^2}}.\end{aligned}\tag{B.6}$$

Se puede comprobar que para cualquier valor de  $Q$ ,  $R_{min}$  es mayor que  $\bar{R}$  definida en la ecuación (3.4).



# Apéndice C

## Notaciones usadas en este trabajo

Se detalla en la siguiente tabla, el convenio de notación que se ha seguido a lo largo de toda la memoria

$P$	presión
$\rho$	densidad de energía
$R \equiv R(t)$	factor de escala (“radio” del universo)
$a$	momento angular específico de un agujero negro de Kerr-Newman
$J$	momento angular de un agujero negro de Kerr-Newman
$g_{\mu\nu}$	métrica del espacio-tiempo
$G$	constante de gravitación universal
$\mathcal{R}$	curvatura escalar
$\mathcal{R}_{\mu\nu}$	tensor de Ricci
$N$	función lapso
$\Lambda$	constante cosmológica
$T_{\mu\nu}$	tensor energía-impulso
$u_{\mu}$	cuatro-velocidad
$w$	parámetro de la ecuación de estado
$A_{\text{ch}}$	parámetro de la ecuación de estado de un gas de Chaplygin (generalizado)
$\alpha$	parámetro de la ecuación de estado de un gas de Chaplygin (generalizado)
$\mathcal{G}_{\mu\nu}$	tensor de Einstein
$\mathcal{M}$	variedad diferenciable
${}_2F_1$	función hipergeométrica 2,1
$\mathcal{K}$	curvatura extrínseca



# Bibliografía

- [1] Abramowitz M. y I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 1980.
- [2] Juan M. Aguirregabiria, Luis P. Chimento, y Ruth Lazkoz. Phantom k-essence cosmologies. *Phys. Rev.*, D70:023509, 2004.
- [3] Andreas Albrecht y Paul J. Steinhardt. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1220–1223, 1982.
- [4] Jailson S. Alcaniz. Testing dark energy beyond the cosmological constant barrier. *Phys. Rev.*, D69:083521, 2004.
- [5] L. Amendola, Fabio Finelli, C. Burigana, y D. Carturan. Wmap and the generalized chaplygin gas. *JCAP*, 0307:005, 2003.
- [6] C. Armendariz-Picon, T. Damour, y V. Mukhanov. k-inflation. *Phys. Lett.*, B458:209–218, 1999.
- [7] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, y Paul J. Steinhardt. A dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4438–4441, 2000.
- [8] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, y Paul J. Steinhardt. Essentials of k-essence. *Phys. Rev.*, D63:103510, 2001.
- [9] E. Babichev, V. Dokuchaev, y Yu. Eroshenko. Black hole mass decreasing due to phantom energy accretion. *Phys. Rev. Lett.*, 93:021102, 2004.
- [10] E. Babichev, V. Dokuchaev, y Yury Eroshenko. The accretion of dark energy onto a black hole. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 100:597–609, 2005.
- [11] J. S. Bagla, Harvinder Kaur Jassal, y T. Padmanabhan. Cosmology with tachyon field as dark energy. *Phys. Rev.*, D67:063504, 2003. Y referencias en este artículo.

- [12] J. D. Barrow. The deflationary universe: An instability of the de sitter universe. *Phys. Lett.*, B180:335–339, 1986.
- [13] J. D. Barrow. Graduated inflationary universes. *Phys. Lett.*, B235:40–43, 1990.
- [14] J. D. Barrow y F. J. Tipler. *The Anthropic Cosmological Principle*. Clarendon Press, Oxford, UK, 1986.
- [15] John D. Barrow. Sudden future singularities. *Class. Quant. Grav.*, 21:L79–L82, 2004.
- [16] D. Bazeia y R. Jackiw. Nonlinear realization of a dynamical poincare symmetry by a field-dependent diffeomorphism. *Annals Phys.*, 270:246–259, 1998.
- [17] Rachel Bean y Olivier Dore. Are chaplygin gases serious contenders to the dark energy throne? *Phys. Rev.*, D68:023515, 2003.
- [18] L. M. G. Beca, P. P. Avelino, J. P. M. de Carvalho, y C. J. A. P. Martins. The role of baryons in unified dark matter models. *Phys. Rev.*, D67:101301, 2003.
- [19] C. L. Bennett et al. First year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Preliminary maps y basic results. *Astrophys. J. Suppl.*, 148:1, 2003.
- [20] M. C. Bento, O. Bertolami, y A. A. Sen. Generalized chaplygin gas, accelerated expansion y dark energy-matter unification. *Phys. Rev.*, D66:043507, 2002.
- [21] Maria da Conceicao Bento, O. Bertolami, y A. A. Sen. Generalized chaplygin gas and cmb constraints. *Phys. Rev.*, D67:063003, 2003.
- [22] Maria da Conceicao Bento, O. Bertolami, y A. A. Sen. Wmap constraints on the generalized chaplygin gas model. *Phys. Lett.*, B575:172–180, 2003.
- [23] O. Bertolami, Anjan Ananda Sen, S. Sen, y P. T. Silva. Latest supernova data in the framework of generalized chaplygin gas model. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 353:329, 2004.
- [24] Orfeu Bertolami. Challenges to the generalized chaplygin gas cosmology. 2004.

- [25] Marek Biesiada, Włodzimierz Godłowski, y Marek Szydlowski. Generalized chaplygin gas models tested with snia. *Astrophys. J.*, 622:28, 2005.
- [26] Neven Bilic, Gary B. Tupper, y Raoul D. Viollier. Dark matter, dark energy and the chaplygin gas. 2002.
- [27] Neven Bilic, Gary B. Tupper, y Raoul D. Viollier. Unification of dark matter and dark energy: The inhomogeneous chaplygin gas. *Phys. Lett.*, B535:17–21, 2002.
- [28] Mariam Bouhmadi-Lopez y Jose A. Jimenez Madrid. Escaping the big rip? *JCAP*, 0505:005, 2005.
- [29] Mariam Bouhmadi-Lopez y Paulo Vargas Moniz. Frw quantum cosmology with a generalized chaplygin gas. *Phys. Rev.*, D71:063521, 2005.
- [30] Robert H. Brandenberger. Cosmic strings, inflationary universe models, and the formation of structure. *J. Phys.*, G15:1, 1989.
- [31] Philippe Brax, Jerome Martin, y Alain Riazuelo. Exhaustive study of cosmic microwave background anisotropies in quintessential scenarios. *Phys. Rev.*, D62:103505, 2000.
- [32] Iver Brevik, Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, y Luciano Vanzo. Entropy and universality of cardy-verlinde formula in dark energy universe. *Phys. Rev.*, D70:043520, 2004.
- [33] Gianluca Calcagni. Slow-roll parameters in braneworld cosmologies. *Phys. Rev.*, D69:103508, 2004.
- [34] R. R. Caldwell. A phantom menace? *Phys. Lett.*, B545:23–29, 2002.
- [35] R. R. Caldwell, Rahul Dave, y Paul J. Steinhardt. Cosmological imprint of an energy component with general equation-of-state. *Phys. Rev. Lett.*, 80:1582–1585, 1998.
- [36] R. R. Caldwell y Paul J. Steinhardt. The imprint of gravitational waves in models dominated by a dynamical cosmic scalar field. *Phys. Rev.*, D57:6057–6064, 1998.
- [37] Robert R. Caldwell, Marc Kamionkowski, y NevinÑ. Weinberg. Phantom energy and cosmic doomsday. *Phys. Rev. Lett.*, 91:071301, 2003.
- [38] Sean M. Carroll, Vikram Duvvuri, Mark Trodden, y Michael S. Turner. Is cosmic speed-up due to new gravitational physics? *Phys. Rev.*, D70:043528, 2004.

- [39] Sean M. Carroll, Mark Hoffman, y Mark Trodden. Can the dark energy equation-of-state parameter  $w$  be less than  $-1$ ? *Phys. Rev.*, D68:023509, 2003.
- [40] Takeshi Chiba, Takahiro Okabe, y Masahide Yamaguchi. Kinetically driven quintessence. *Phys. Rev.*, D62:023511, 2000.
- [41] Luis P. Chimento. Extended tachyon field, chaplygin gas and solvable  $k$ -essence cosmologies. *Phys. Rev.*, D69:123517, 2004.
- [42] Luis P. Chimento y Ruth Lazkoz. On the link between phantom and standard cosmologies. *Phys. Rev. Lett.*, 91:211301, 2003.
- [43] James M. Cline, Sang-yong Jeon, y Guy D. Moore. The phantom menaced: Constraints on low-energy effective ghosts. *Phys. Rev.*, D70:043543, 2004.
- [44] Jr. Colistete, R., J. C. Fabris, S. V. B. Goncalves, y P. E. de Souza. Dark energy, dark matter and the chaplygin gas. 2002.
- [45] Jr. Colistete, Roberto y J. C. Fabris. Bayesian analysis of the (generalized) chaplygin gas and cosmological constant models using the 157 gold sne ia data. *Class. Quant. Grav.*, 22:2813–2834, 2005.
- [46] Mariusz P. Dabrowski, Tomasz Stachowiak, y Marek Szydlowski. Phantom cosmologies. *Phys. Rev.*, D68:103519, 2003.
- [47] P.C.W. Davies. *The Last Three Minutes: Conjectures About the Ultimate Fate of the Universe*. Basic Books, New York, USA, 1997.
- [48] P. de Bernardis et al. A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. *Nature*, 404:955–959, 2000.
- [49] Cedric Deffayet. Cosmology on a brane in minkowski bulk. *Phys. Lett.*, B502:199–208, 2001.
- [50] Cedric Deffayet, G. R. Dvali, y Gregory Gabadadze. Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions. *Phys. Rev.*, D65:044023, 2002.
- [51] Abha Dev, Deepak Jain, y J. S. Alcaniz. Cosmological consequences of a chaplygin gas dark energy. *Phys. Rev.*, D67:023515, 2003.
- [52] Abha Dev, Deepak Jain, y Jailson S. Alcaniz. Constraints on chaplygin quartessence from the class gravitational lens statistics and supernova data. *Astron. Astrophys.*, 417:847–852, 2004.

- [53] Elisa Di Pietro y Jacques Demaret. Quintessence: Back to basics. *Int. J. Mod. Phys.*, D10:231–237, 2001.
- [54] R. H. Dicke y P. J. E. Peebles. *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, chapter The Big Bang cosmology—Enigmas and nostrums, pages 504–517. Eds. S. W. Hawking y W. Israel. (Cambridge: Cambridge University Press, UK), 1979.
- [55] A. Einstein y N. Rosen. *Phys. Rev.*, 48:73, 1935.
- [56] G. Ellis y S. W. Hawking. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1973.
- [57] J. C. Fabris, S. V. B. Goncalves, y P. E. de Souza. Density perturbations in an universe dominated by the chaplygin gas. *Gen. Rel. Grav.*, 34:53–63, 2002.
- [58] J. C. Fabris, S. V. B. Goncalves, y P. E. De Souza. Mass power spectrum in a universe dominated by the chaplygin gas. *Gen. Rel. Grav.*, 34:2111–2126, 2002.
- [59] Valerio Faraoni. Big smash of the universe. *Phys. Rev.*, D68:063508, 2003.
- [60] Yasunori Fujii. A two-scalar model for a small but nonzero cosmological constant. *Phys. Rev.*, D62:064004, 2000.
- [61] Jaume Garriga y V. F. Mukhanov. Perturbations in k-inflation. *Phys. Lett.*, B458:219–225, 1999.
- [62] G. W. Gibbons. Phantom matter and the cosmological constant. 2003.
- [63] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, y T. Vachaspati. *The Formation and Evolution of Cosmic Strings*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.
- [64] P. F. Gonzalez-Diaz. Some notes on the big rip. *Phys. Lett.*, B635:1–6, 2006.
- [65] P. F. Gonzalez-Diaz y C. L. Siguenza. The fate of black holes in an accelerating universe. *Phys. Lett.*, B589:78–82, 2004.
- [66] Pedro F. Gonzalez-Diaz. Ringholes and closed timelike curves. *Phys. Rev.*, D54:6122–6131, 1996.
- [67] Pedro F. Gonzalez-Diaz. Cosmological models from quintessence. *Phys. Rev.*, D62:023513, 2000.

- [68] Pedro F. Gonzalez-Diaz. Unified model for dark energy. *Phys. Lett.*, B562:1–8, 2003.
- [69] Pedro F. Gonzalez-Diaz. Wormholes and ringholes in a dark-energy universe. *Phys. Rev.*, D68:084016, 2003.
- [70] Pedro F. Gonzalez-Diaz. You need not be afraid of phantom energy. *Phys. Rev.*, D68:021303, 2003.
- [71] Pedro F. Gonzalez-Diaz. Achronal cosmic future. *Phys. Rev. Lett.*, 93:071301, 2004.
- [72] Pedro F. Gonzalez-Diaz. Axion phantom energy. *Phys. Rev.*, D69:063522, 2004.
- [73] Pedro F. Gonzalez-Diaz. K-essential phantom energy: Doomsday around the corner? *Phys. Lett.*, B586:1–4, 2004.
- [74] Pedro F. Gonzalez-Diaz. On the accretion of phantom energy onto wormholes. *Phys. Lett.*, B632:159–161, 2006.
- [75] Pedro F. Gonzalez-Diaz y Jose A. Jimenez-Madrid. Phantom inflation and the 'big trip'. *Phys. Lett.*, B596:16–25, 2004.
- [76] Pedro F. Gonzalez-Diaz y Jose A. Jimenez Madrid. Wiggly cosmic strings accrete dark energy .
- [77] Pedro F. Gonzalez-Diaz y Carmen L. Siguenza. Phantom thermodynamics. *Nucl. Phys.*, B697:363–386, 2004.
- [78] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, y V. Pasquier. The chaplygin gas as a model for dark energy. 2004.
- [79] Vittorio Gorini, Alexander Kamenshchik, y Ugo Moschella. Can the chaplygin gas be a plausible model for dark energy? *Phys. Rev.*, D67:063509, 2003.
- [80] III Gott, J. Richard. Gravitational lensing effects of vacuum strings: Exact solutions. *Astrophys. J.*, 288:422–427, 1985.
- [81] I. S. Gradshteyn y I. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 1994.
- [82] N. Graham. The measurement of relative frequency. In B.S. DeWitt y N. Graham, editors, *The Many Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, pages 229–253. Princeton University Press, Princeton, 1973.



- [83] Alan H. Guth. The inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev.*, D23:347–356, 1981.
- [84] Jonathan J. Halliwell y Raymond Laflamme. Conformal scalar field worm-holes. *Class. Quant. Grav.*, 6:1839, 1989.
- [85] Jian-gang Hao y Xin-zhou Li. Constructing dark energy models with late time de sitter attractor. *Phys. Rev.*, D68:083514, 2003.
- [86] Jian-gang Hao y Xin-zhou Li. Phantom with born-infield type lagrangian. *Phys. Rev.*, D68:043501, 2003.
- [87] Jian-Gang Hao y Xin-zhou Li. Phantom cosmic doomsday: A tale of two attractors. *Phys. Rev.*, D70:043529, 2004.
- [88] Jian-Gang Hao y Xin-Zhou Li. Generalized quartessence cosmic dynamics: Phantom or quintessence with de sitter attractor. *Phys. Lett.*, B606:7–11, 2005.
- [89] J. B. Hartle y S. W. Hawking. Wave function of the universe. *Phys. Rev.*, D28:2960–2975, 1983.
- [90] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975.
- [91] S. W. Hawking. The chronology protection conjecture. *Phys. Rev.*, D46:603–611, 1992.
- [92] S.W. Hawking. *The brief history of time*. (Barton Books, N.Y., USA, 1988).
- [93] S.W. Hawking. Quantum cosmology. In B.S. DeWitt y R. Stora, editors, *Relativity, Groups and Topology II: Proceedings of the 40th Summer School of Theoretical Physics, NATO Advanced Study Institute, Les Houches, France, June 27-August 4, 1983*, Les Houches Summer School Proceedings, Amsterdam, 1984. North-Holland.
- [94] W. A. Hiscock. Exact gravitational field of a string. *Phys. Rev.*, D31:3288–3290, 1985.
- [95] Greg Huey, Li-Min Wang, Rahul Dave, R. R. Caldwell, y Paul J. Steinhardt. Resolving the cosmological missing energy problem. *Phys. Rev.*, D59:063005, 1999.
- [96] J. C. Jackson. Apocalypse soon. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 296:619, 1998.

- [97] J. C. Jackson y Marina Dodgson. Decelerating universes older than their hubble times. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 297:923–928, 1998.
- [98] Raul Jimenez. The value of the equation of state of dark energy. *New Astron. Rev.*, 47:761–767, 2003.
- [99] J.A. Jimenez Madrid y P.F. Gonzalez-Diaz. Quintessence in Friedmann-Robertson-Walker spaces. En *SYMMETRIES IN GRAVITY AND FIELD THEORY. Homenaje al Profesor Jose Adolfo de Azcarraga*, (Editores: Victor Aldaya, Jose M Cervero, y Pilar Garcia), 2004.
- [100] Jose A. Jimenez Madrid. Chaplygin gas may prevent big trip. *Phys. Lett.*, B634:106–110, 2006.
- [101] Jose A. Jimenez Madrid y Pedro F. Gonzalez-Diaz. Evolution of a kerr-newman black hole in a dark energy universe .
- [102] Vinod B. Johri. Phantom cosmologies. *Phys. Rev.*, D70:041303, 2004.
- [103] Renata Kallosh, Jan Kratochvil, Andrei Linde, Eric V. Linder, y Marina Shmakova. Observational bounds on cosmic doomsday. *JCAP*, 0310:015, 2003.
- [104] Alexander Yu. Kamenshchik, Ugo Moschella, y Vincent Pasquier. An alternative to quintessence. *Phys. Lett.*, B511:265–268, 2001.
- [105] T. W. B. Kibble. Topology of cosmic domains y strings. *J. Phys.*, A9:1387–1398, 1976.
- [106] T. W. B. Kibble. Testing cosmological defect formation in the laboratory. 2001.
- [107] William H. Kinney, Edward W. Kolb, Alessandro Melchiorri, y Antonio Riotto. Wmapping inflationary physics. *Phys. Rev.*, D69:103516, 2004.
- [108] P. Laguna y D. Garfinkle. Space-time of supermassive u(1) gauge cosmic strings. *Phys. Rev.*, D40:1011–1016, 1989.
- [109] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields : Volume 2 (Course of Theoretical Physics Series)*. Pergamon Press Ltd, 1995.
- [110] Andrei Linde. Prospects of inflation. *Phys. Scripta*, T117:40–48, 2005.
- [111] Andrei D. Linde. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Phys. Lett.*, B108:389–393, 1982.

- [112] Andrei D. Linde y Dmitri A. Linde. Topological defects as seeds for eternal inflation. *Phys. Rev.*, D50:2456–2468, 1994.
- [113] Dao-jun Liu y Xin-zhou Li. Born-infeld-type phantom on the brane world. *Phys. Rev.*, D68:067301, 2003.
- [114] Francisco S. N. Lobo. Phantom energy traversable wormholes. *Phys. Rev.*, D71:084011, 2005.
- [115] Francisco S. N. Lobo. Chaplygin traversable wormholes. *Phys. Rev.*, D73:064028, 2006.
- [116] H. Q. Lu. Phantom cosmology with a nonlinear born-infeld type scalar field. *Int. J. Mod. Phys.*, D14:355–362, 2005.
- [117] Michael Malquarti, Edmund J. Copeland, y Andrew R. Liddle. K-essence and the coincidence problem. *Phys. Rev.*, D68:023512, 2003.
- [118] Michael Malquarti, Edmund J Copeland, Andrew R Liddle, y Mark Trodden. A new view of k-essence. *Phys. Rev.*, D67:123503, 2003.
- [119] Brett McInnes. The ds/cft correspondence and the big smash. *JHEP*, 08:029, 2002.
- [120] Xin-He Meng y Peng Wang. Inflationary attractor property of phantoms. 2003.
- [121] M. S. Morris y K. S. Thorne. Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.*, 56:395–412, 1988.
- [122] M. S. Morris, K. S. Thorne, y U. Yurtsever. Wormholes, time machines, and the weak energy condition. *Phys. Rev. Lett.*, 61:1446–1449, 1988.
- [123] Tuomas Multamaki, Marc Manera, y Enrique Gaztanaga. Large scale structure and the generalised chaplygin gas as dark energy. *Phys. Rev.*, D69:023004, 2004.
- [124] S. Nojiri, O. Obregon, S. D. Odintsov, y K. E. Osetrin. Induced wormholes due to quantum effects of spherically reduced matter in large n approximation. *Phys. Lett.*, B449:173–179, 1999.
- [125] Shin'ichi Nojiri y Sergei D. Odintsov. desitter brane universe induced by phantom and quantum effects. *Phys. Lett.*, B565:1–9, 2003.

- [126] Shin'ichi Nojiri y Sergei D. Odintsov. Effective equation of state and energy conditions in phantom / tachyon inflationary cosmology perturbed by quantum effects. *Phys. Lett.*, B571:1–10, 2003.
- [127] Shin'ichi Nojiri y Sergei D. Odintsov. Quantum desitter cosmology and phantom matter. *Phys. Lett.*, B562:147–152, 2003.
- [128] Shin'ichi Nojiri y Sergei D. Odintsov. The final state and thermodynamics of dark energy universe. *Phys. Rev.*, D70:103522, 2004.
- [129] Shin'ichi Nojiri y Sergei D. Odintsov. Gravity assisted dark energy dominance and cosmic acceleration. *Phys. Lett.*, B599:137–142, 2004.
- [130] I.D. Novikov. Whither Does the River of Time Flow? *molodaya Gvardiya*, Moscow (en ruso), 1990. Se puede encontrar un traducción parcial en: I.D. Novikov, *The River of Time*, (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998).
- [131] G. Olmo Alba. *Correcciones cuánticas de agujeros negros y cosmología*. Tesis Doctoral, Universitat de València, 2005.
- [132] Miguel E. Ortiz. A new look at supermassive cosmic strings. *Phys. Rev.*, D43:2521–2526, 1991.
- [133] T. Padmanabhan. Cosmological constant: The weight of the vacuum. *Phys. Rept.*, 380:235–320, 2003.
- [134] T. Padmanabhan. Dark energy: the cosmological challenge of the millennium. *Curr. Sci.*, 88:1057, 2005.
- [135] P. J. E. Peebles y Bharat Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, 75:559–606, 2003.
- [136] R. Penrose. Gravitational Collapse: The Role of General Relativity. *Riv. Nuovo Cimento*, (1, special number):252–276, 1969.
- [137] S. Perlmutter et al. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565–586, 1999.
- [138] Yun-Song Piao y Yuan-Zhong Zhang. Phantom inflation and primordial perturbation spectrum. *Phys. Rev.*, D70:063513, 2004.
- [139] Bharat Ratra y P. J. E. Peebles. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *Phys. Rev.*, D37:3406, 1988.

- [140] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116:1009–1038, 1998.
- [141] Varun Sahni y Yuri Shtanov. Braneworld models of dark energy. *JCAP*, 0311:014, 2003.
- [142] Havard Sandvik, Max Tegmark, Matias Zaldarriaga, y Ioav Waga. The end of unified dark matter? *Phys. Rev.*, D69:123524, 2004.
- [143] Parampreet Singh, M. Sami, y Naresh Dadhich. Cosmological dynamics of phantom field. *Phys. Rev.*, D68:023522, 2003.
- [144] D.Ñ. Spergel et al. First year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Determination of cosmological parameters. *Astrophys. J. Suppl.*, 148:175, 2003.
- [145] D. N. Spergel et al. Wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) three year results: Implications for cosmology. 2006.
- [146] Alexei A. Starobinsky. Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe. *JETP Lett.*, 30:682–685, 1979.
- [147] Alexei A. Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Phys. Lett.*, B91:99–102, 1980.
- [148] Alexei A. Starobinsky. Future and origin of our universe: Modern view. *Grav. Cosmol.*, 6:157–163, 2000.
- [149] Hrvoje Stefancic. Generalized phantom energy. *Phys. Lett.*, B586:5–10, 2004.
- [150] Paul J. Steinhardt, Li-Min Wang, y Ivaylo Zlatev. Cosmological tracking solutions. *Phys. Rev.*, D59:123504, 1999.
- [151] Max Tegmark et al. Cosmological parameters from sdss and wmap. *Phys. Rev.*, D69:103501, 2004.
- [152] John L. Tonry et al. Cosmological results from high-z supernovae. *Astrophys. J.*, 594:1–24, 2003.
- [153] Michael S. Turner. Dark matter and dark energy: The critical questions. 2002.
- [154] A. Vilenkin. Cosmic strings. *Phys. Rev.*, D24:2082–2089, 1981.

- [155] A. Vilenkin. Cosmological density fluctuations produced by vacuum strings. *Phys. Rev. Lett.*, 46:1169–1172, 1981.
- [156] A. Vilenkin y E. P. S. Shellard. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994.
- [157] Alexander Vilenkin. Cosmic strings and domain walls. *Phys. Rept.*, 121:263, 1985.
- [158] Alexander Vilenkin. Topological inflation. *Phys. Rev. Lett.*, 72:3137–3140, 1994.
- [159] Matt Visser. *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*. American Institute of Physics Press (Woodbury, New York), 1995.
- [160] D.Ñ. Vollick. Small scale structure on cosmic strings and galaxy formation. *Phys. Rev.*, D45:1884–1897, 1992.
- [161] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [162] Li-Min Wang y Paul J. Steinhardt. Cluster abundance constraints on quintessence models. *Astrophys. J.*, 508:483–490, 1998.
- [163] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23, 1989.
- [164] C. Wetterich. Cosmology and the fate of dilatation symmetry. *Nucl. Phys.*, B302:668, 1988.
- [165] Pu-Xun Wu y Hong-Wei Yu. Avoidance of big rip in phantom cosmology by gravitational back reaction. *Nucl. Phys.*, B727:355–367, 2005.
- [166] Zong-Hong Zhu. Generalized chaplygin gas as a unified scenario of dark matter/energy: observational constraints. *Astron. Astrophys.*, 423:421–426, 2004.
- [167] Ivaylo Zlatev, Li-Min Wang, y Paul J. Steinhardt. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Phys. Rev. Lett.*, 82:896–899, 1999.