

Universidad de Granada

Programa de Doctorado en Física y Matemáticas

Espectropolarimetría Milne-Eddington para la cromosfera solar

Tesis presentada por

Antonio Jesús Dorantes Monteagudo

Director

David Orozco Suárez

INSTITUTO DE ASTROFÍSICA DE ANDALUCÍA
CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

Marzo 2023



INSTITUTO DE
ASTROFÍSICA DE
ANDALUCÍA



EXCELENCIA
SEVERO
OCHOA



CSIC



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

*"No es tarde para quien sabe esperar.
No dejes que el azar le ponga nombre a cada posibilidad."*

– María Villalón

*"Cuando el cambio es para mejor, los rumbos dispersos pierden control.
Hace tiempo que entiendo que broto más fuerte tras superar lo peor."*

– Sabela

*"We don't change. We take the gravel and the shell and we make a pearl.
And we help other people to change so that they can see more kinds of
beauty."*

– Alecia Beth Moore (P!nk)

*"Mira a la derecha y a la izquierda del tiempo y que tu corazón
aprenda a estar tranquilo."*

– Federico García Lorca

A ti, impulso en mi camino

Agradecimientos

Echo la vista atrás y no puedo dejar de pensar en todas esas personas que me habéis acompañado en este trayecto y que habéis estado conmigo, que me habéis ayudado y me habéis dado ese *impulso* necesario para seguir muchas veces en las que he flaqueado.

Si estoy escribiendo estas palabras es gracias a mi director por confiar en mí para llevar a cabo esta tesis. David, gracias por guiarme y por darme las herramientas que he necesitado en este camino. Gracias también por la oportunidad y los ánimos, que son tan necesarios en tantísimas ocasiones.

Mamá, Papá, gracias por el apoyo que me habéis dado siempre, por haber puesto a mi alcance todo lo que necesitara para conseguir cualquier cosa y por confiar en mí más de lo que yo mismo pudiera hacerlo. Gracias a mis tías Auri e Isi, mis tíos Grego y Antonio, mi hermano y mis primas y primos. ¡Qué afortunado me siento de esta gran **familia** que somos! Una familia cuya semilla plantaron nuestros abuelos. Cómo no, gracias infinitas a ellos. Sé que estaríais orgullosos de mí.

Si hay alguien que ha sido impulso durante estos cuatro años han sido ellos: **mis amigos**. Los que están en las buenas, en las malas y en las muy malas. Los que tienen su huequito en mi "cora" y me hacen sentir pleno de amor.

Nadia, tu "pequeño Newton" se hace grande. Gracias por estar en cada pasito de mi camino desde siempre, por ser apoyo y por compartir la vida conmigo. Te quiero millones. María, desde el instituto juntos y aquí seguimos, tan iguales y tan distintos a como éramos. Lo que no hayamos vivido tú y yo juntos no lo ha vivido nadie... y qué bonito es recordarlo siempre. Parece mentira, pero después de tantos "¿Cómo va la tesis?", aquí estamos, ya a punto. Gracias siempre por ser y por estar. Rocío, no podría tener mejor compi de camino que tú. Estoy muy orgulloso de ti como persona y como amiga y me siento un privilegiado por tenerte. Gracias por cada ratito, por cada "Holiiii" y por estar ahí siempre. Eres un soplo de vida. Te adoro.

Mi equipo de gestiones 24 h PAS Management, ¿qué haría sin vosotros?

Sin duda, sois la prueba de que si alguien tiene que llegar a tu vida, no importa cómo, el caso es que lo hará. Os habéis convertido en mi segunda familia, mi refugio, mi "aire de montaña". Marta, Franto, María, gracias por las risas, los llantos, por ser motor, por inspirarme, por compartir la vida y por ayudarme a ser la mejor versión de mí mismo. ¡Os quiero con el alma!

Lucía, bendito momento en que se cruzaron nuestros caminos. Empezamos juntos y juntos acabamos. Lo nuestro fue un flechazo y no tengo ni la mínima duda de ello. Cada rato juntos sabe a gloria, cada problema es menos problema y las risas contigo tienen otro color. Eres imprescindible y que nadie se atreva a negarlo. Gracias por la vida que me das. ¡TE SÚPER QUIERO! Carlos y Marta, qué bonito es estar con vosotros y tener la sensación de que no hubiera pasado el tiempo. Gracias por haceros sentir como un apoyo al que recurrir siempre, por las absurdices y hasta por las veces que os he tenido que mandar al rincón.

Laura, cuando nos conocimos creo que jamás me hubiera imaginado que te volverías una persona tan especial. Gracias por esas sobremesas en las que nos olvidábamos del mundo, por guiarme y por ser inspiración y motivación para seguir. Esto no habría sido lo mismo sin ti. Gracias también por haber ido abriéndonos el camino desde el primer momento, por hacerlo todo más fácil y por tender siempre una mano a todos los que lo hemos necesitado. Has sido la mejor representante que hemos tenido y eso es indiscutible. Eres admirable.

Feli y Antonio, sois las dos personas más tontísimas que han pisado el suelo del IAA y no tengo ningún problema en dejarlo aquí por escrito... pero tengo que admitir que también sois de las más generosas que he podido conocer. Gracias por ser así, por las risas, los diparates y por hacer que cualquiera, junto a vosotros, pueda respirar y olvidarse por un segundo de los problemas. Who-Lia, Julia, Pablo, Guille, Patty llegastéis en un momento crucial. Un momento en el que necesitaba renovar las ganas y coger impulso para lo que quedaba por delante. En parte, es por vosotros que lo conseguí. Cambiasteis totalmente mi forma de vivir Granada y de vivir el IAA, abriendo mi mundo, siendo desconexión, desahogo, risas y fuente de buenos consejos. Gracias infinitas siempre. Leire, eres simplemente increíble. La valentía que tienes para coger las riendas de tu vida y dirigirla hacia donde quieres es deslumbrante. Gracias por contagiarme tu risa, por enseñarme tu mundo y tu forma de ver, entender y vivir la vida.

Azaymi, eres de las personas más brillantes y trabajadoras que la vida me ha dado la oportunidad de conocer. Llegamos juntos al IAA y desde ese momento tuve en ti un apoyo incondicional. Sara, eres todo un derroche de

energía que contagias nada más verte. Gracias a las dos por vuestra ayuda, por encontrar siempre el lado bueno de las cosas, por ser guía y no dejar que perdiera mi norte, por vuestros consejos y vuestra amistad.

Isabel, gracias por ser tan atenta, por tus consejos y por ponerme siempre de buen humor con tus ocurrencias. Bea y Manu, gracias por vuestro buen rollo y por no perder la sonrisa por mucho drama que haya de por medio. Es una alegría veros siempre.

Si estoy aquí es también por todas mis **profesoras** que me han acompañado en cada etapa de mi educación. Personas que disfrutaban enseñando y transmitiendo su conocimiento a las nuevas generaciones. Lucía, Marta, Inma, Ángela, Pilar y María, gracias por guiar mis primeros pasos en las Matemáticas, la Biología, la Física y la Química. Sois la semilla de este trabajo. ¡VIVA LA EDUCACIÓN PÚBLICA!

Gracias en general a todos mis **profesores de la Universidad de la Laguna** por enseñarme la belleza del Universo y por ayudarme a conocer y entender su funcionamiento. Basilio, si me ha hecho especial ilusión que formes parte de este tribunal es porque fuiste el primero que entró por la puerta de nuestra clase cuando empezamos el Master de Astrofísica y aquí sigues, hasta el último momento. Me he sentido acompañado por ti durante todo este camino pudiendo contar contigo en todo lo que haya necesitado. Te puedo asegurar que, a día de hoy, todos mis compañeros y compañeras, entre los que me incluyo, te tenemos un aprecio enorme. Gracias por tu generosidad siempre. Manolo y Lena, gracias por haberme enseñado a entender el Sol, por hacerme disfrutar tanto al estudiarlo y por poner a mi alcance las herramientas que necesitara para trabajar con él.

Gracias también a Carlos Quintero por su ayuda para todo lo que he necesitado, a Rafa Manso por guiarme durante mi estancia en Alemania aprovechando el tiempo allí al máximo y a Carlos Díaz por las explicaciones detalladas sobre su código y por estar siempre dispuesto a ayudar en todo lo que pueda.

Durante este tiempo en el IAA me he sentido en casa y si ha sido así es por la calidad humana que hay. Gracias a todo el equipo de administración, recursos humanos y gerencia por su ayuda con la burocracia. Gracias al equipo de dirección por su atención con todas y todos los que aquí trabajamos. Gracias, cómo no, al equipo de limpieza, recepción, mantenimiento y centro de cálculo por estar pendientes de que todo esté a punto.

Por último, gracias a mí mismo por aguantar hasta el final y no tirar la toalla. ¡Lo conseguimos!

Abstract of the Thesis

Espectropolarimetría Milne-Eddington para la cromosfera solar

by

Antonio Jesús Dorantes Monteagudo

Doctoral Program

Física y Matemáticas

Universidad de Granada

March 2023

The Milne-Eddington model is one of the most known and useful approximations to solve the Radiative Transfer Equation. It provides an analytical solution that is easy to understand. Its use implies to suppose constant magnetic fields and velocities with height and the assumption of a linear source function. So the main limitation is that this approximation only works under Local Thermodynamic Equilibrium conditions because it is only capable to reproduce symmetric Voigt profiles. In the Solar Physics its use is extended for studying the photosphere, not the chromosphere or the corona, where the conditions depart from Thermodynamic Equilibrium. [Lites et al. \(1988\)](#) proposed to modify this approximation including exponential terms variations with optical depth in the source function. Thus they increased the degrees of freedom in the approximation allowing it to fit chromospheric profiles.

In this work we take the idea of [Lites et al. \(1988\)](#) providing an analytical solution of the Radiative Transfer Equation applying this modified Milne-Eddington approximation. We also calculate the

response functions to the new parameters, helping us to understand their role. Later, we apply the approximation to standard chromospheric models and to realistic data. In the latter case, we fit intensity and polarization profiles of Mg I b2 and Ca II 854.2 lines using realistic magnetohydrodynamic simulations (Carlsson et al., 2016). We compare the results against those obtained with others like weak field approximation or center of gravity technique.

After that, we study the polarization scattering and the Hanle effect which happen in low density plasmas. We do it solving the Statistical Equilibrium Equations for a two level atomic transition. Its solution provides the atomic populations of these levels and we use them to compute the scattering polarization signals. We finish this work analyzing scattering polarization diagrams for the Mg I b2 line under different conditions. We also represent the polarization diagram of a modified Milne-Eddington model giving an interpretation of it based on the previous diagrams.

After the study performed about the modified Milne-Eddington approximation and the results that it provides, we can confirm that it can be used to explore solar chromosphere in a fast and easy-to-interpret way, also including scattering polarization and Hanle effect.

Resumen de Tesis

Espectropolarimetría Milne-Eddington para la cromosfera solar

por

Antonio Jesús Dorantes Monteagudo

Programa de Doctorado

Física y Matemáticas

Universidad de Granada

Marzo 2023

La aproximación Milne-Eddington es una de las más conocidas y utilizadas a la hora de resolver la Ecuación de Transporte Radiativo, ya que proporciona una solución analítica de fácil interpretación. El uso de esta aproximación implica la suposición de campos magnéticos y velocidades que son constantes con la profundidad óptica, y asume, además, que la función fuente que es lineal. Esto lleva a la aproximación a reproducir perfiles de Voigt simétricos, haciendo que funcione apropiadamente solo bajo condiciones de Equilibrio Termodinámico Local. Es por ello que, en el caso del Sol, su uso está principalmente extendido al estudio de la fotosfera ya que en regiones cromosféricas y en la corona, las condiciones físicas del plasma solar no son de Equilibrio Termodinámico. [Lites et al. \(1988\)](#) propusieron una modificación de la aproximación en la que la función fuente tuviera dependencias exponenciales con la profundidad óptica. De esta forma estarían dando mayor grado de libertad a dicha aproximación, permitiéndole ajustar la forma de los perfiles cromosféricos.

En este trabajo retomamos la idea de [Lites et al. \(1988\)](#), dando una expresión analítica de la solución de la Ecuación de Transporte Radiativo aplicando esta nueva aproximación Milne-Eddington modificada. Además, hallaremos las funciones respuesta de los nuevos parámetros que introduce, las cuales nos ayudan a interpretar cual es el papel que juegan cada uno de ellos. Después ponemos en práctica la aproximación y hacemos un estudio con modelos cromosféricos estándar; posteriormente, ajustamos en intensidad y polarización líneas de Mg I b2 y Ca II 854.2 a partir de datos de simulaciones magnetohidrodinámicas realistas ([Carlsson et al., 2016](#)), y compararemos los resultados con otras aproximaciones como la de campo débil o la técnica del centro de gravedad.

Continuamos con un estudio la polarización por *scattering* y efecto Hanle, un fenómeno que se da en regiones de baja densidad. Para ello, resolvemos las Ecuaciones de Equilibrio Estadístico para una transición la que intervienen dos niveles atómicos. Su solución nos proporciona las poblaciones de dichos niveles y, con ellas, calculamos las señales de polarización generadas por los procesos scattering. Cerramos el trabajo estudiando los diagramas de polarización por scattering para el caso de la línea de Mg I b2 imponiendo diferentes escenarios. Finalmente generamos el diagrama de polarización para las condiciones de una atmósfera Milne-Eddington modificada y damos una interpretación en base a los obtenidos con condiciones impuestas.

Tras este estudio realizado sobre la aproximación Milne-Eddington modificada y a la vista de los resultados obtenidos, podemos confirmar que es una herramienta a la que sacar partido para explorar la cromosfera solar de una forma rápida y de fácil interpretación, dando lugar, incluso, a incorporar fenómenos como la polarización por scattering y el efecto Hanle.

Índice

1	Una descripción general del Sol	1
1.1	Polarización en líneas atómicas. Régimen Zeeman y Hanle. . .	5
1.1.1	Efecto Zeeman	6
1.1.2	Polarización atómica y efecto Hanle	8
2	El Transporte Radiativo	11
2.1	Solución formal de la ETR	13
2.2	El Equilibrio Termodinámico	14
2.3	La ETR para la formación de líneas	15
2.3.1	La ETR para luz polarizada	15
2.3.2	La matriz de propagación	16
3	Aproximaciones a la ecuación de transporte	19
3.1	El régimen de campo débil	19
3.1.1	Relajando la aproximación: Desarrollo de orden superior. Polarización lineal.	22
3.1.2	Componentes del campo magnético en régimen de campo débil	24
3.2	Atmósferas Milne-Eddington	25
3.2.1	Solución formal de la ETR para la formación de líneas en una atmósfera ME	26
3.2.2	Función fuente con exponenciales: modelos mME	27
3.2.3	Funciones Respuesta en una atmósfera mME	31
4	El modelo mME para interpretar la cromosfera	35
4.1	Precedentes	35
4.2	Validez del modelo mME	36
4.2.1	Convergencia y unicidad de la solución frente al ruido	37
4.2.2	Comparación con modelos cromosféricos estándar	39
4.2.3	Determinación de la función fuente	41
4.3	Comparación frente a modelos MHD realistas	43

4.3.1	Intensidad de campo magnético	45
4.3.2	Inclinación del campo magnético	49
4.3.3	Velocidad a lo largo de la línea de visión	49
5	Las Ecuaciones de Equilibrio Estadístico. El factor de anisotropía para el Mg I b2 según modelos mME.	55
5.1	La matriz de densidad y el tensor de radiación.	56
5.2	Ecuaciones de Equilibrio Estadístico	58
5.2.1	Resolución de las Ecuaciones de Equilibrio Estadístico	61
5.3	Cálculo del factor de anisotropía	68
6	Polarización por scattering en el Mg I b2	71
6.1	Polarización lineal fraccional	72
6.2	Implementación y cálculo de las señales de polarización	73
6.3	Influencia del factor de anisotropía y del número promedio de fotones en las señales de polarización para la línea de Mg I b2	75
6.3.1	Estudio del factor de anisotropía	77
6.3.2	Estudio del número promedio de fotones	79
6.4	La línea de Mg I b2 en una atmósfera mME	80
	Conclusiones y Trabajo Futuro	85
	Conclusions and Future Work	89
	Referencias	93
A	Desarrollo analítico del factor de anisotropía en un modelo mME	97

Capítulo 1

Una descripción general del Sol

El Sol es una estrella cuya proximidad a la Tierra la hace única debido al efecto que tiene sobre su clima y sobre el clima espacial. Gracias a dicha proximidad, su estudio es de gran importancia para entender el comportamiento de otras estrellas y del plasma cósmico. Se puede decir, por ello, que nuestra estrella es un laboratorio de plasma.

Podemos distinguir dos grandes zonas: el *interior* y la *atmósfera*. El interior del Sol está dividido en tres regiones: el núcleo, un enorme reactor nuclear donde se produce la energía de la estrella; la zona radiativa, a través de la cual se propaga la radiación generada en el núcleo hacia afuera mediante mecanismos de difusión radiativa, de forma que los fotones se absorben y emiten repetidas veces, llegando a tardar años en cruzarla; y la zona convectiva, cuyo transporte de energía dominante se debe a la convección del plasma (de ahí su nombre). Aunque todo el interior es opaco a las observaciones directas, podemos inferir propiedades de él gracias a la *heliosismología*. El interior del Sol queda delimitado por la superficie, que es la zona a partir de la cual los fotones comienzan a escapar hacia el espacio. Es entonces cuando entramos en la atmósfera solar, una región completamente diferente al interior y de la cual sí podemos obtener información a partir de observaciones directas.

En función del nivel de actividad que encontramos en la atmósfera del Sol, podemos distinguir entre *regiones en calma* y *regiones activas*. El Sol en calma puede caracterizarse, en primera aproximación, como una bola de plasma estática y esféricamente simétrica cuyas propiedades dependen de la distancia radial y cuyo campo magnético puede despreciarse, aunque envuelve los gránulos y supergránulos. Está compuesto mayoritariamente de hidrógeno y helio, cuyas abundancias, aunque varían en función de la región en la que nos situemos, son, en la superficie, del 71% y del 26%, respectivamente, aunque también dispone de elementos más pesados en una proporción del 2% (Stix, 2002). Observacionalmente, está repleto de señales o campos magnéticos a

diferentes escalas, desde los campos intensos, del orden de los kG (kilo Gauss), distribuidos en lo que conocemos como red o *network* en inglés, a los más débiles, que cubren toda la superficie. Por otro lado, las regiones activas, que se superponen a la región en calma y deben su existencia a la emergencia de grandes lazos magnéticos generados por la dinamo solar en la zona de convección hacia la superficie.

Otra característica destacable de la atmósfera solar es su estratificación de temperatura. Es de esperar que a medida que nos alejamos de la superficie, el plasma se vaya enfriando con la altura, debido a la emisión de radiación, pero en el Sol, alcanza un mínimo de unos 4400 K a unos 500 km. A partir de ahí, comienza a crecer de nuevo lentamente hasta llegar a valores de 10^4 K a una altura de unos miles de kilómetros sobre la superficie, donde, en cuestión de unos pocos cientos de kilómetros, alcanza valores del orden de los millones de Kelvin (ver Fig 1.2). A día de hoy, el calentamiento cromosférico y coronal siguen siendo objeto de estudio, ya que no se conoce con exactitud su origen físico. En la comunidad científica está aceptado que la presencia de campo magnético en todos y cada uno de los rincones de la atmósfera solar es la potencial responsable de este calentamiento.

Generalmente, en la atmósfera podemos distinguir tres regiones con propiedades y dinámicas físicas diferentes: la *fotosfera*, la *cromosfera* y la *corona*. La fotosfera es la región más profunda de la atmósfera solar y tiene una extensión de unos cientos de kilómetros. Recibe su nombre del término griego *photos* que significa luz. Se trata de una región que no es ni uniformemente brillante, ni se encuentra en total estado de calma. Esto se debe a los movimientos convectivos del plasma que están presentes a diferentes escalas (gránulos y supergránulos), además de fenómenos como la rotación diferencial y las oscilaciones de 5 minutos. Esta región es relativamente densa y opaca y de ella proviene la mayor parte de la radiación solar. Su espesor óptico¹ característico es $\tau \lesssim 1$ en el ultravioleta cercano, visible y el continuo del infrarrojo cercano y es ópticamente delgada en líneas espectrales débiles. Respecto al campo magnético, en la fotosfera encontramos un amplio rango de intensidades a diferentes escalas. Los campos más fuertes los encontramos en estructuras de campo verticales, rodeando los supergránulos, cubriendo aproximadamente un 5% de la superficie del Sol. Campos con intensidades de unos pocos cientos de Gauss, corresponden a inclinaciones más horizontales y yacen en el interior de estos supergránulos. A medida que subimos en la atmósfera, la intensidad

¹El espesor óptico o profundidad óptica, τ , es una magnitud que cuantifica la transparencia de un material. Para un tipo de radiación determinada, además del grosor de material que debe atravesar, dependerá de la densidad del mismo y de la frecuencia de la propia radiación. Un medio es transparente u ópticamente delgado a un tipo de radiación si su espesor óptico es menor que la unidad ($\tau \lesssim 1$) y opaco u ópticamente grueso si $\tau \rightarrow \infty$.

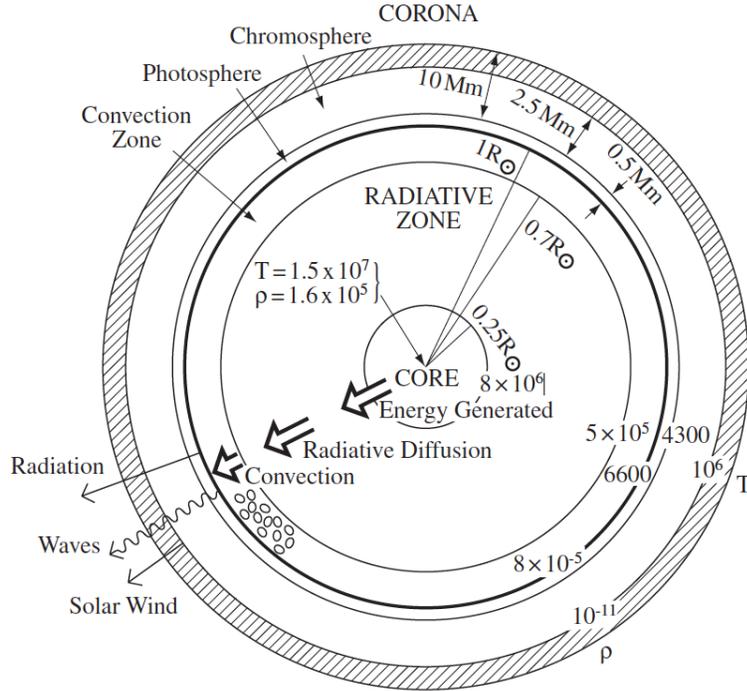


Figura 1.1: Estructura del Sol. Se pueden observar las diferentes regiones y sus temperaturas (en Kelvin, K) y densidades (en kg m^{-3}). La profundidad de cada zona no está dibujada a escala (Priest, 2014)

del campo magnético disminuye, ya que las líneas de campo verticales van abriéndose con la altura porque el tubo de flujo magnético debe mantenerse en equilibrio hidrostático con el entorno. La disminución drástica de la presión del gas con la altura implica que las líneas de campo deben abrirse y la presión magnética disminuir. Podemos encontrar campos de entre 1500 y 1700 G en el fondo de la fotosfera que corresponden con campos de entre 200 y 500 G a la altura del mínimo de temperatura (Priest, 2014). En términos de campos magnéticos promedios, en las regiones activas, podemos hablar de valores entre 100 y 500 G, mientras que en regiones de Sol en calma, hay observaciones que proporcionan valores medios de unos 3 G (SoHO/MDI)² y otras de unos 10 G (Hinode/SOT)².

Más arriba en la atmósfera encontramos la cromosfera, una región muy compleja, incluso en las zonas en calma, ya que está muy deformada y es altamente dinámica, por lo que está lejos de poder caracterizarse como una corteza esférica. El nombre de cromosfera proviene del término griego *chroma*, que significa color, en alusión al anillo que se observa sobre el limbo lunar

²Priest (2014)

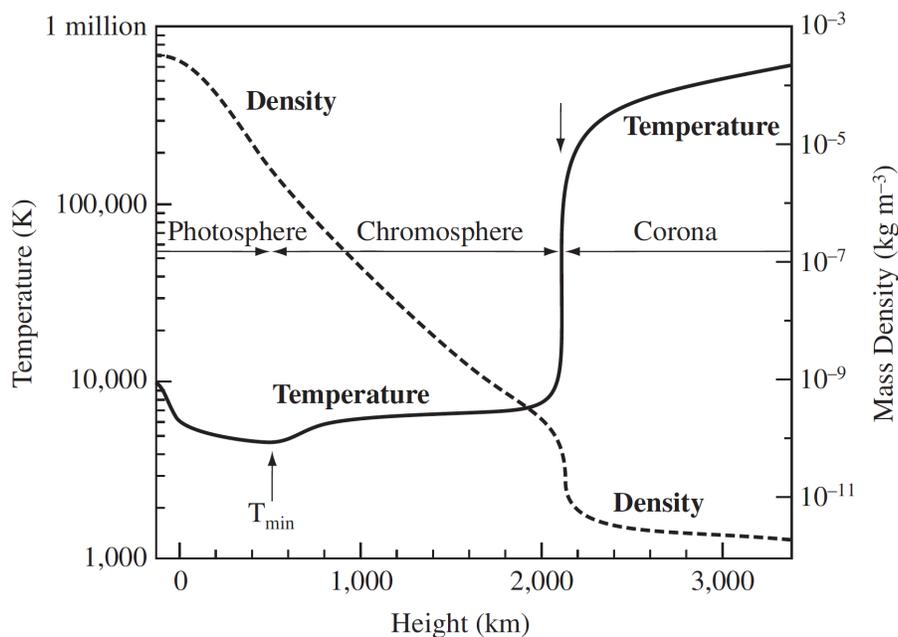


Figura 1.2: Variación media con la altura de la temperatura y la densidad según el modelo VAL (Vernazza-Avrett-Loeset) de atmósfera solar (Priest, 2014)

durante un eclipse de Sol, el cual se debe a la emisión de la línea $H\alpha$ (Carlsson, 2007). A lo largo de la cromosfera, el plasma pasa de estar dominado por la presión del gas a estar dominado por la presión magnética (pasa de $\beta > 1$ a $\beta < 1$)³, las colisiones dejan de ser relevantes y el medio se vuelve ópticamente delgado al ultravioleta y a las ondas milimétricas (Fletcher et al., 2010), aunque sigue siendo ópticamente gruesa en las líneas espectrales intensas.

Antes de llegar a la corona nos encontramos con una región con grandes inhomogeneidades donde se produce una discontinuidad en la temperatura. Como decíamos anteriormente, pasamos de temperaturas de órdenes de los 10^4 K en la cromosfera alta, a valores del orden de los millones de Kelvin en la corona baja. Esa transición se produce en unas pocas decenas de kilómetros en lo que conocemos como región de transición. El rango espectral óptimo para observarla es el ultravioleta, ya que la presencia de iones a tan diferentes temperaturas genera líneas de emisión y emisiones en el continuo en ese rango (Stix, 2002).

Al alcanzar las temperaturas del millón de Kelvin llegamos a la corona,

³La beta del plasma representa el cociente entre la presión ejercida por el gas del plasma y la presión del campo magnético: $\beta = P_g/P_B$. Si la presión magnética es superior a la del gas ($\beta < 1$), el plasma queda dominado por la dinámica del campo magnético, mientras que será el propio gas el que moldee el campo en el caso contrario ($\beta > 1$).

la parte más alta de la atmósfera solar, una región completamente dominada por los campos magnéticos debido a la baja densidad del plasma a esa altura. En esta región encontramos elementos con alto grado de ionización debido a las elevadas temperaturas. Esto hace que la corona tenga emisión térmica en rayos X y su observación óptima sea en este rango (o en el extremo ultravioleta desde el espacio).

1.1 Polarización en líneas atómicas. Régimen Zeeman y Hanle.

En el campo de la Física Solar (y de la Astrofísica en general), la forma de obtener información del Sol es estudiando la radiación que recibimos de él, en concreto, su espectro electromagnético, donde encontramos, además de la radiación del continuo, líneas espectrales, las cuales se producen por las transiciones entre los distintos niveles atómicos de las especies que forman el plasma. Estas líneas atómicas pueden estar polarizadas debido a la presencia de una dirección preferente que rompe la simetría esférica. Existen dos casos posibles: la presencia de un campo magnético o que el campo de radiación sea anisótropo.

En el caso de que la dirección preferente sea la de un campo magnético, este rompe la degeneración de los niveles atómicos dando lugar a nuevas transiciones entre los subniveles disponibles (ver figura 1.3). En este caso, los átomos emitirán luz polarizada linealmente y circularmente.

Por otro lado, si la dirección preferente es la de un campo de radiación que es anisótropo, el átomo sufrirá descompensaciones en las poblaciones de sus niveles degenerados (se polariza – ver Sec.1.1.2) e interferencias cuánticas entre ellos. Esto provoca que la reemisión de la radiación no sea simétrica y por tanto esté polarizada linealmente. Este fenómeno es el que se conoce como polarización por *scattering*.

Si, además de la presencia de un campo de radiación anisótropo tenemos un campo magnético, podemos encontrarnos dos escenarios. Aunque exista campo magnético, la intensidad de este puede ser tan débil como para que el desdoblamiento de los subniveles sea despreciable con respecto a la anchura natural de la línea, en este caso diremos que nos encontramos en un régimen Hanle. Por otro lado, podemos encontrarnos con el caso contrario, en el que el campo magnético sea tan intenso que el átomo se despolariza, de forma que volveríamos al caso inicial en el que la dirección preferente es la del campo magnético. Este caso se conoce como régimen Zeeman.

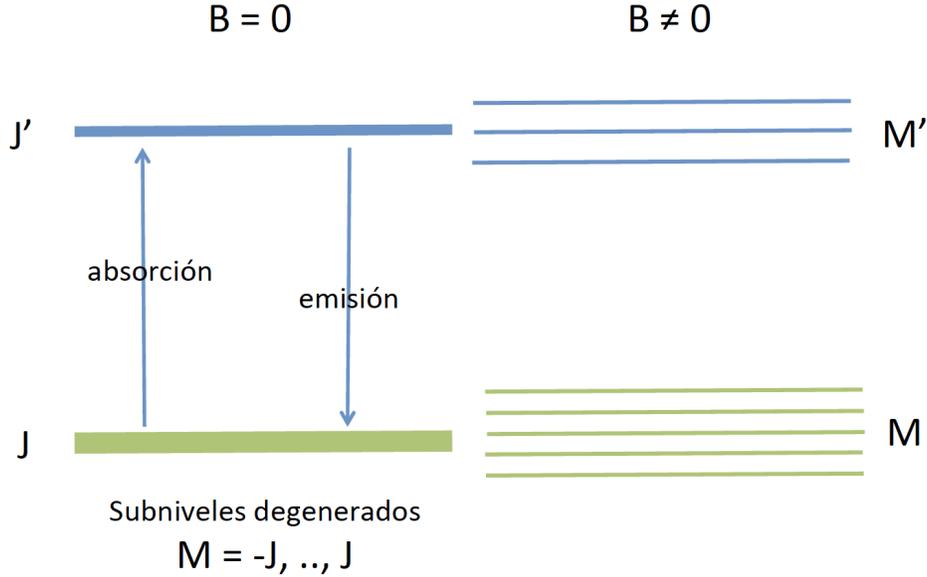


Figura 1.3: Representación de una transición atómica entre un nivel $J = 2$ y uno $J' = 1$. En ausencia de campo magnético los subniveles se encuentran degenerados, es decir, tienen la misma energía, mientras que en presencia de un campo, estos se desdoblaron en $M = 2J + 1$ y $M' = 2J' + 1$ subniveles, respectivamente, dando lugar a nuevas transiciones.

1.1.1 Efecto Zeeman

Cuando una transición atómica se genera en el seno de un campo magnético, la línea espectral correspondiente a dicha transición sufrirá un desdoblamiento en diferentes componentes debido a que los niveles energéticos también se desdoblaron. El grado de desdoblamiento dependerá del número cuántico magnético del nivel que intervienen en la transición, M y M' . La frecuencia de las componentes vendrá determinada por

$$\nu_{MM'}^{JJ'} = \nu_0 + \nu_L(g'M' - gM) \quad : \quad \nu_L = \frac{eB}{4\pi m_e c} \quad (1.1)$$

donde ν_0 es la frecuencia natural de la línea, ν_L es la frecuencia de Larmor, g y g' son los correspondientes factores de Landé, los cuales representan una medida de la sensibilidad magnética de cada nivel.

En nuestro caso, es habitual trabajar con longitudes de onda en vez de con frecuencias. Podemos expresar la separación de las componentes estos términos como

$$\lambda_{MM'}^{JJ'} = \frac{c}{\nu_0 + \nu_L(g'M' - gM)} \simeq \lambda_0 - \Delta\lambda_B(g'M' - gM) + \dots \quad (1.2)$$

donde hemos realizado un desarrollo de Taylor hasta primer orden asumiendo $\nu_L \ll \nu_0$ y hemos definido la separación Zeeman, $\Delta\lambda_B$, como

$$\Delta\lambda_B = \lambda_0^2 \frac{\nu_L}{c} = k\lambda_0^2 B \quad (1.3)$$

donde, si trabajamos con campos en Gauss (G) y longitudes de onda en Angstroms (Å), la constante k toma el valor

$$k = \frac{e}{4\pi m_e c^2} = 4.67 \cdot 10^{-13} \text{ G}^{-1} \text{Å}^{-1} \quad (1.4)$$

El número de transiciones posibles viene determinado por las reglas de selección cuánticas, según las cuales, solo son posibles aquellas en las que $\Delta J = 0, \pm 1$ y $\Delta M = 0, \pm 1$. Además, la transición $J = 0 \rightarrow J' = 0$ está prohibida.

Encontramos tres tipos de transiciones en función del valor que tome ΔM , las cuales estarán relacionadas con el tipo de polarización de los fotones. En función de ello, la transición recibe un nombre u otro.

- Si $\Delta M = +1$, el fotón absorbido estaba polarizado circularmente a derechas y da lugar a la transición más energética de las tres posibles. En el espectro se situará a longitudes de onda menores, es decir, desplazadas al azul respecto a la longitud de onda central (mayores frecuencias), de ahí que reciban el nombre de transición sigma azul σ_b .
- Si $\Delta M = 0$, el fotón se encontraba polarizado linealmente, esto no provoca un cambio energético, de forma que la longitud de onda no se ve modificada. Estas transiciones reciben el nombre de transición pi π .
- Si $\Delta M = -1$, nos encontramos en el caso de un fotón polarizado a izquierdas, el cual da lugar a una transición de energía menor. Al contrario que en el primer caso, esta componente se situaría desplazada al rojo, es decir, a longitudes de onda mayores respecto de la central (menores frecuencias) y reciben el nombre de transición sigma roja σ_r .

Este fenómeno se denominó como efecto Zeeman normal o triplete (ya que las líneas se desdoblaron en tres componentes). Existen casos en los que las líneas pueden desdoblarse en más componentes, dando lugar a un mayor número de transiciones. Estaríamos hablando de efecto Zeeman anómalo. Para trabajar de una forma más cómoda con este último, se agrupan todas las líneas según el tipo de transición, obteniéndose un triplete efectivo y reduciendo el problema al efecto Zeeman triplete.

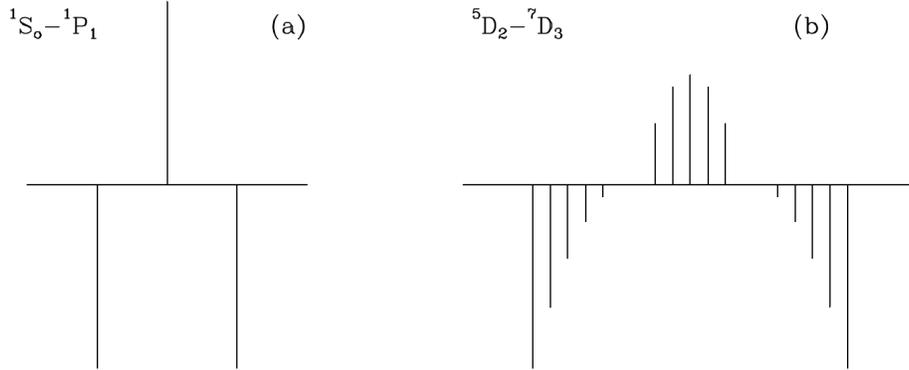


Figura 1.4: Patrones Zeeman característicos de las transiciones $^1S_0 - ^1P_1$ (a) y $^5D_2 - ^7D_3$ (b). En el primer caso tenemos efecto Zeeman triplete y en el segundo anómalo. Siguiendo el convenio se han representado las componentes π hacia arriba y las σ hacia abajo (Landi Degl’Innocenti & Landolfi, 2004).

La forma más común de caracterizar el efecto Zeeman es a través del *factor de Landé efectivo*, \bar{g} , el cual representa la separación de las componentes circularmente polarizadas, respecto de la longitud de onda natural de la transición. En función a los parámetros que caracterizan una transición, se define como

$$\bar{g} = \frac{1}{2}g_s + \frac{1}{4}g_d d \quad (1.5)$$

siendo

$$g_s = g' + g, \quad g_d = g' - g, \quad d = J'(J' + 1) - J(J + 1)$$

1.1.2 Polarización atómica y efecto Hanle

La presencia de campos magnéticos no es la única forma de generar señales de polarización en la radiación. Los procesos de *scattering* también producen polarización que, para que tengan lugar, es necesario que las partículas que producen este *scattering* sean iluminadas con radiación anisótropa.

Este fenómeno lo podemos entender de la siguiente manera: la radiación anisótropa provoca que los estados atómicos queden polarizados, es decir, que las poblaciones de los niveles se descompensen haciendo que el átomo no se pueda describir mediante un estado de equilibrio. Esto hace que la radiación, al interactuar con él quede polarizada por no emitirse de forma isotrópica, si no descompensada. Si además contamos con la presencia de un campo magnético suficientemente intenso, como hemos visto anteriormente, los estados atómicos

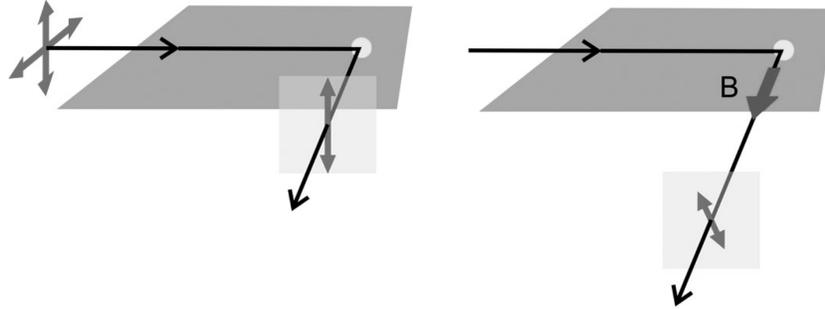


Figura 1.5: Geometría del scattering a 90° . A la izquierda en ausencia de campo magnético. A la derecha en presencia de un campo alineado con la dirección de observación. Figura extraída de [Trujillo \(2005\)](#)

pueden verse perturbados. Si la intensidad de dicho campo es muy débil, la polarización generada por scattering puede verse afectada por una reducción de su señal y una rotación del plano, este efecto es el que se conoce como efecto Hanle.

En ausencia de campo magnético, solo podemos generar polarización si las poblaciones de los subniveles atómicos son diferentes. Esto se consigue mediante procesos de excitación anisótropos, ya sean radiativos o colisionales, que son capaces de generar estos desequilibrios. Las colisiones, por otro lado, destruyen la polarización atómica, por lo que las señales de polarización por dispersión se observan principalmente en plasmas poco densos. En la atmósfera solar, la polarización atómica es muy débil en la fotosfera, pero su presencia crece en la cromosfera debido al drástico descenso de las colisiones. En la corona, las señales de polarización lineal dominan ya que la anisotropía del campo de radiación es mucho mayor.

Clásicamente, podemos explicar este fenómeno si consideramos el átomo como un oscilador armónico descrito en una base cartesiana. En ausencia de campo magnético, si sometemos ese átomo a un campo de radiación despolarizado, se excitarán las direcciones perpendiculares a la propagación. La radiación reemitida por el átomo estará polarizada en esas mismas direcciones y, si consideramos una geometría de scattering a 90° (ver figura 1.5), observaremos polarización en la dirección perpendicular al plano de scattering, ya que la señal paralela a la propagación no se puede detectar. Si además tenemos un campo magnético paralelo a la línea de visión, cuya intensidad sea lo suficientemente débil, la dirección de esa polarización sufrirá cierta rotación y la intensidad de la señal se puede reducir.

Capítulo 2

El Transporte Radiativo

La teoría del Transporte Radiativo se encarga de estudiar cómo varía un campo de radiación al interactuar con un medio material que absorbe, emite y dispersa la radiación. La intensidad del campo, al atravesar el material se verá modificada por estos procesos, los cuales caracterizaremos a continuación para derivar la ecuación de transporte, que es la ecuación fundamental que describe las variaciones de intensidad y polarización (lo veremos más adelante) en un medio.

Consideramos que el medio tiene un coeficiente de absorción por unidad de masa, κ_ν , que depende de la frecuencia de la radiación. Si la intensidad específica incidente sobre el medio es I_ν , al atravesarlo se verá atenuada una cantidad dI_ν^{abs} , definida como

$$dI_\nu^{abs} = -\kappa_\nu \rho I_\nu dz \quad (2.1)$$

donde ρ es la densidad del medio y dz el espesor que atraviesa la radiación. De la misma forma, si el medio tiene un coeficiente de emisión j_ν , la intensidad emergente se verá incrementada una cantidad dI_ν^{em} dada por

$$dI_\nu^{em} = j_\nu \rho dz \quad (2.2)$$

La intensidad emergente del medio será suma de la incidente más la emitida y absorbida por el propio medio.

$$I_\nu + dI_\nu^{abs} + dI_\nu^{em} = I_\nu + dI_\nu \quad (2.3)$$

Para obtener la ecuación de transporte radiativo solo tenemos que ver cómo varía la intensidad a lo largo del medio, es decir, tenemos que calcular la derivada de I_ν a lo largo del camino dentro del medio dz . Si, como hemos visto, la variación de intensidad la describimos en función de las absorciones

y emisiones, tendremos

$$dI_\nu = dI_\nu^{abs} + dI_\nu^{em} = -\kappa_\nu \rho I_\nu dz + j_\nu \rho dz \quad (2.4)$$

y, operando, hallamos la derivada y nos queda

$$\frac{dI_\nu}{dz} = -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \rho \quad (2.5)$$

Considerando la dirección radial del Sol como la dirección de propagación de la radiación y asumiendo la aproximación de atmósfera plano-paralela, la ecuación nos queda de la siguiente forma:

$$\mu \frac{dI_\nu(\mu)}{dr} = -\kappa_\nu \rho I_\nu(\mu) + j_\nu \rho \quad (2.6)$$

donde $\mu = \cos \theta$ es el ángulo heliocéntrico y dr el diferencial de longitud en la dirección radial.

En astrofísica es común trabajar con la profundidad óptica τ_ν ya que es una magnitud que tiene en cuenta además de la profundidad geométrica, la densidad del gas y la frecuencia de la radiación. En forma diferencial se define como

$$d\tau_\nu = -\kappa_\nu \rho dr. \quad (2.7)$$

Dividiendo la ecuación 2.6 entre $\kappa_\nu \rho$, podemos expresarla en términos de la profundidad óptica de forma que nos queda

$$\mu \frac{dI_\nu(\mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\mu) - \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}. \quad (2.8)$$

Si definimos el cociente entre la capacidad de emisión y la de absorción como la función fuente del medio S_ν

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}, \quad (2.9)$$

llegamos a la siguiente expresión

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - S(\tau) \quad (2.10)$$

que es la ecuación de transporte radiativo (ETR a partir de ahora), donde por comodidad hemos eliminado el subíndice ν de las magnitudes y hemos expresado explícitamente la dependencia con la profundidad óptica τ .

2.1 Solución formal de la ETR

Podemos resolver formalmente la ETR (Ec. 2.10) llevando a cabo una serie de transformaciones sobre la ecuación que reducen el problema de tener que integrarla analíticamente.

Multiplicamos la ecuación por el factor $\mu^{-1} \exp(-\tau/\mu)$ y manipulamos los términos de la siguiente forma:

$$\frac{e^{-\tau/\mu}}{\mu} \left[\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} \right] = \frac{e^{-\tau/\mu}}{\mu} [I(\tau, \mu) - S(\tau)] ,$$

$$e^{-\tau/\mu} \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} - \frac{e^{-\tau/\mu}}{\mu} I(\tau, \mu) = -\frac{e^{-\tau/\mu}}{\mu} S(\tau) .$$

El primer miembro de la ecuación lo podemos reescribir como la derivada del producto de dos funciones, de forma que nos queda

$$e^{-\tau/\mu} \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} + \frac{d(e^{-\tau/\mu})}{d\tau} I(\tau, \mu) = \frac{d}{d\tau} [I(\tau, \mu) e^{-\tau/\mu}] .$$

Integramos la ecuación en profundidad óptica desde el punto desde el cual observamos ($\tau = 0$) hasta un nivel de referencia, τ

$$\int_{t=0}^{t=\tau} d [I(t, \mu) e^{-t/\mu}] = - \int_{t=0}^{t=\tau} S(t) \frac{e^{-t/\mu}}{\mu} dt ,$$

donde hemos usado t como variable de integración para distinguirla de la profundidad óptica de referencia.

Calculando las integrales y manipulando los términos, obtenemos para la intensidad recibida

$$I(0, \mu) = I(\tau, \mu) e^{-\tau/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_0^\tau S(t) e^{-t/\mu} dt . \quad (2.11)$$

Si integramos para toda la atmósfera, es decir, desde $\tau = 0$ hasta $\tau \rightarrow \infty$, que corresponde con el fondo, obtenemos la intensidad total emergente dada por

$$I(0, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty S(t) e^{-t/\mu} dt . \quad (2.12)$$

Esta expresión nos indica que la intensidad total emergente que recibimos es la suma de todas las intensidades generadas a cada profundidad óptica, atenuadas un factor $e^{-t/\mu}$.

2.2 El Equilibrio Termodinámico

Se dice que un medio se encuentra en Equilibrio Termodinámico (ET) si podemos describirlo con una sola temperatura, T , no existiendo, por tanto, gradientes al desplazarnos en su seno. En este caso, la distribución de velocidades de las partículas que lo conforman sigue una distribución de Maxwell y los estados de ionización de los átomos cumplen la ecuación de Saha y los estados de excitación la ecuación de Boltzmann. Además, el campo de radiación lo podemos describir como el de un cuerpo negro a la temperatura T mediante la función de Planck

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (2.13)$$

donde h es la constante de Planck (6.626×10^{-34} J·s), c es la velocidad de la luz (3×10^8 m·s⁻¹) y k_B es la constante de Boltzmann (1.38×10^{-23} J·K⁻¹).

En la realidad no encontramos situaciones que satisfagan las condiciones de ET, ya que se trata de condiciones ideales, sin embargo, sí podemos encontrar regiones en un medio que estén cerca de satisfacerlas. En estas situaciones hablamos de Equilibrio Termodinámico Local (ETL), es decir, tenemos regiones del medio que podemos describir con una única temperatura, pero el medio en su totalidad no satisface esta condición.

En un gas podremos asumir ETL siempre que la longitud de termalización¹ sea menor que la distancia a la que la temperatura del gas cambia suficientemente. Esto deja claro que, en un mismo punto de la atmósfera, el ETL puede ser una buena aproximación para estudiar ciertos procesos o líneas, pero no serlo para otros.

A la hora de resolver el transporte radiativo, la simplificación más importante que introduce asumir ETL es poder considerar una función fuente que sigue la distribución de Planck a la temperatura local del medio T :

$$S_\nu = B_\nu(T) . \quad (2.14)$$

De forma general, el continuo en los rangos visible e infrarrojo, las alas de la mayoría de líneas espectrales y los perfiles de líneas débiles se forman en regiones en ETL, como la fotosfera, y, por tanto, podemos estudiarlas bajo esta aproximación.

En los casos en los que la longitud de termalización es mayor que la distancia a la que varía la temperatura del medio o las interacciones radiativas son tan excepcionales que no dan lugar a las distribuciones mencionadas an-

¹La longitud de termalización es la distancia para la cual una partícula emitida por el medio ha experimentado tantas interacciones como para ajustarse a la distribución del mismo.

teriormente, no podemos asumir ETL y decimos que estamos en condiciones de No Equilibrio Termodinámico Local (NETL). Este caso debemos tenerlo en cuenta a la hora de trabajar con líneas espectrales intensas y algunos núcleos espectrales, ya que se forman en regiones poco densas y muy dinámicas como la cromosfera o la corona.

2.3 La ETR para la formación de líneas

Cuando aplicamos el transporte radiativo al estudio de las líneas de absorción, es conveniente que expresemos la profundidad óptica (definida en Ec. 2.7) como la contribución de la profundidad óptica del continuo τ_C más la de la línea τ_l :

$$d\tau_\nu = d\tau_C + d\tau_l = (1 + \eta)d\tau_C , \quad (2.15)$$

donde η es el cociente entre el coeficiente de absorción de la línea κ_l y el del continuo κ_C :

$$\eta(\nu) = \frac{\kappa_l(\nu)}{\kappa_C} . \quad (2.16)$$

Al ser el coeficiente η función de la frecuencia del campo de radiación, podemos decir que también lo es de la profundidad óptica, de forma que $\eta \equiv \eta(\nu) \equiv \eta(\tau)$. Teniendo en cuenta estas consideraciones, la ETR (Ec. 2.10) aplicada a la formación de líneas espectrales nos quedaría de la siguiente forma:

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = (1 + \eta)(I - S) , \quad (2.17)$$

donde, además de ya no hacer explícitas las dependencias funcionales, ahora τ hace referencia a la profundidad óptica del continuo (τ_C).

Encontrar una solución formal a la ETR para la formación de líneas, igual que hicimos para el caso de la ecuación 2.10, no es tan trivial, ya que ahora, además de la dependencia de la función fuente con la propia intensidad, η es función de la profundidad óptica. Será más adelante, introduciendo ciertas aproximaciones y consideraciones, cuando veamos algunas soluciones.

2.3.1 La ETR para luz polarizada

Como hemos visto en el primer capítulo, en el Sol encontramos campos magnéticos los cuales pueden polarizar la luz que se emite en la estrella. Por tanto, para estudiar la luz proveniente de él e inferir de ella las propiedades físicas del medio no basta con hacer uso de la ETR para la intensidad, si no que es necesario incluir los posibles estados de polarización de la misma. Es conveniente

agrupar estos estados de polarización junto con la intensidad en un vector de cuatro componentes con el cual se puede describir el estado de la luz de forma unívoca. Este vector es el vector de Stokes, y viene dado por

$$\mathbf{I} \equiv (I, Q, U, V)^T \quad (2.18)$$

donde I es la intensidad del rayo de luz, Q y U describen la polarización lineal y V la polarización circular.

Si pasamos de utilizar una magnitud como la intensidad, a utilizar el vector de Stokes para describir la radiación, la ecuación de transporte deja de ser una ecuación escalar y pasa a ser una ecuación matricial

$$\mu \frac{d\mathbf{I}}{d\tau} = \mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{S}) \quad (2.19)$$

donde \mathbf{I} es el vector de Stokes, \mathbf{S} es un vector que contiene la función fuente para cada una de las componentes del vector de Stokes y $\mathbf{K} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\eta})$ es la matriz de propagación del medio.

La ecuación 2.19 representa un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, donde todas las magnitudes dependen de la profundidad óptica y no puede obtenerse una solución analítica. Como ya mencionamos anteriormente, daremos soluciones a ciertos casos particulares que plantearemos más adelante.

2.3.2 La matriz de propagación

La matriz de propagación \mathbf{K} contiene toda la información sobre el campo magnético del medio donde se genera la línea espectral. Está definida como:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \eta_I & \eta_Q & \eta_U & \eta_V \\ \eta_Q & \eta_I & \rho_V & -\rho_U \\ \eta_U & -\rho_V & \eta_I & \rho_Q \\ \eta_V & \rho_U & -\rho_Q & \eta_I \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

donde los η_i son perfiles de absorción: η_I es el perfil de absorción en intensidad sin importar el tipo de polarización; $\eta_{Q,U}$ el perfil de absorción de polarización lineal; y η_V , el perfil de absorción de polarización circular; mientras que los $\rho_{Q,U,V}$, son los perfiles de dispersión por efectos magnetoópticos, los cuales representan los cambios que se producen entre los distintos estados de polarización.

Para una geometría del campo magnético con una inclinación θ , y un azi-

muñ χ , las expresiones analíticas² de los perfiles de absorción quedan de la siguiente manera:

$$\eta_I = 1 + \frac{\eta_0}{2} \left[\phi_p \sin^2 \theta + \frac{\phi_b + \phi_r}{2} (1 + \cos^2 \theta) \right] \quad (2.21)$$

$$\eta_Q = \frac{\eta_0}{2} \left[\phi_p - \frac{\phi_b + \phi_r}{2} \right] \sin^2 \theta \cos 2\chi \quad (2.22)$$

$$\eta_U = \frac{\eta_0}{2} \left[\phi_p - \frac{\phi_b + \phi_r}{2} \right] \sin^2 \theta \sin 2\chi \quad (2.23)$$

$$\eta_V = \frac{\eta_0}{2} [\phi_r - \phi_b] \cos \theta \quad (2.24)$$

Mientras que para los perfiles de dispersión tenemos

$$\rho_Q = \frac{\eta_0}{2} \left[\psi_p - \frac{\psi_b + \psi_r}{2} \right] \sin^2 \theta \cos 2\chi \quad (2.25)$$

$$\eta_U = \frac{\eta_0}{2} \left[\psi_p - \frac{\psi_b + \psi_r}{2} \right] \sin^2 \theta \sin 2\chi \quad (2.26)$$

$$\eta_V = \frac{\eta_0}{2} [\psi_r - \psi_b] \cos \theta \quad (2.27)$$

donde η_0 es el coeficiente de absorción de la línea relativo al continuo; los perfiles $\phi_{p,r,b}$ son funciones de Voigt³ para las componentes π , σ_r y σ_b de la línea espectral; y los perfiles $\psi_{p,r,b}$ son funciones de Faraday-Voigt⁴ para esas mismas componentes.

²Para más detalles sobre la derivación de estas expresiones puede consultar el Capítulo 7 de [del Toro Iniesta \(2003\)](#).

³La función de Voigt se define como

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} H(a, \nu) \quad (2.28)$$

donde

$$H(a, \nu) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{(v-y)^2 + a^2} dy \quad (2.29)$$

⁴La función de Faraday-Voigt se define

$$\psi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} F(a, \nu) \quad (2.30)$$

siendo

$$F(a, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v-y)e^{-y^2}}{(v-y)^2 + a^2} dy \quad (2.31)$$

Capítulo 3

Aproximaciones a la ecuación de transporte

En este capítulo vamos a resolver la ETR para luz polarizada (ec. 2.19) en dos escenarios diferentes. Vamos a considerar primero que nos encontramos en régimen de campo débil, es decir, que la intensidad del campo magnético es suficientemente débil como para no provocar desdoblamientos en las líneas mayores que su anchura Doppler. Por otro lado, vamos a abordar el caso de una atmósfera Milne-Eddington, con la que asumiremos que no hay gradientes de campo magnético ni de velocidades, es decir, que estas magnitudes no varían con la altura. Esto nos proporciona una matriz de propagación \mathbf{K} que es constante. Además la aproximación también supone que la función fuente varía linealmente con la profundidad. Es aquí donde la modificaremos introduciendo variaciones exponenciales en dicha función fuente.

3.1 El régimen de campo débil

Decimos que nos encontramos en régimen de campo débil cuando el desdoblamiento provocado por el efecto Zeeman en la línea espectral es mucho menor que la anchura Doppler de esa línea ($\Delta\lambda_B \ll \Delta\lambda_D$). En este caso podemos realizar un análisis perturbativo de la ETR (Centeno, 2018; Jefferies et al., 1989; Landi Degl’Innocenti, 1973; Landi Degl’Innocenti & Landolfi, 2004) y deducir de él algunas propiedades sin necesidad de resolver la ecuación formalmente.

Los perfiles de cada una de las componentes del triplete Zeeman quedan determinados en función de la longitud de onda de cada componente, por las

siguientes expresiones funcionales:

$$\phi_p = \phi(\lambda_0) \quad , \quad \phi_b = \phi(\lambda_0 - \Delta\lambda_B) \quad , \quad \phi_r = \phi(\lambda_0 + \Delta\lambda_B) \quad (3.1)$$

$$\psi_p = \psi(\lambda_0) \quad , \quad \psi_b = \psi(\lambda_0 - \Delta\lambda_B) \quad , \quad \psi_r = \psi(\lambda_0 + \Delta\lambda_B) \quad (3.2)$$

Como ya hemos mencionado, bajo esta aproximación, la separación entre las líneas es muy pequeña comparada con su anchura, por tanto, podemos hacer un desarrollo en series de Taylor de estas expresiones en torno a $\Delta\lambda_B$. Para estudiar la polarización circular basta con cortar el desarrollo en el término de primer orden, pero para obtener señales de polarización lineal bajo esta aproximación es necesario recurrir a términos de orden 2. Es aquí donde se introduce una nueva magnitud equivalente al factor de Landé efectivo \bar{g} (ec. 1.5). Definimos este nuevo parámetro \bar{G} como

$$\bar{G} = \bar{g}^2 - \delta \quad (3.3)$$

donde

$$\delta = \frac{1}{80}g_d^2(16s - 7d^2 - 4) \quad : \quad s = J_u(J_u + 1) + J_l(J_l + 1)$$

Como vemos, este nuevo parámetro no es más que el cuadrado factor de Landé efectivo, correspondiente al término de segundo orden, con una corrección δ . De esta forma, podemos expresar los términos del desarrollo de Taylor en longitud de onda (ec. 1.2) hasta orden 2 como

$$\lambda \simeq \lambda_0 - \Delta\lambda_B\bar{g} + \Delta\lambda_B^2\bar{G} \quad (3.4)$$

y obtenemos para los perfiles de Voigt (eq. 3.1) las siguientes expresiones

$$\phi_b = \phi(\lambda_0 - \Delta\lambda_B) \simeq \phi(\lambda_0) + \phi'(\lambda_0)\Delta\lambda_B\bar{g} + \frac{1}{2}\phi''(\lambda_0)\Delta\lambda_B^2\bar{G} + \dots$$

$$\phi_r = \phi(\lambda_0 + \Delta\lambda_B) \simeq \phi(\lambda_0) - \phi'(\lambda_0)\Delta\lambda_B\bar{g} + \frac{1}{2}\phi''(\lambda_0)\Delta\lambda_B^2\bar{G} + \dots$$

De forma análoga, para los perfiles de Faraday-Voigt (eq. 3.2) nos queda

$$\psi_b = \psi(\lambda_0 - \Delta\lambda_B) \simeq \psi(\lambda_0) + \psi'(\lambda_0)\Delta\lambda_B\bar{g} + \frac{1}{2}\psi''(\lambda_0)\Delta\lambda_B^2\bar{G} + \dots$$

$$\psi_r = \psi(\lambda_0 + \Delta\lambda_B) \simeq \psi(\lambda_0) - \psi'(\lambda_0)\Delta\lambda_B\bar{g} + \frac{1}{2}\psi''(\lambda_0)\Delta\lambda_B^2\bar{G} + \dots$$

Sustituyendo este desarrollo en las expresiones analíticas de los perfiles de absorción (ecuaciones 2.21 - 2.24) y los perfiles de dispersión (ecuaciones 2.25

- 2.27) y operando, obtenemos

$$\eta_I = 1 + \eta_0\phi + \frac{1}{2}\phi''\Delta\lambda_B^2\bar{G} \approx 1 + \eta_0\phi , \quad (3.5)$$

$$\eta_Q = -\frac{1}{4}\phi''\Delta\lambda_B^2\bar{G}\sin^2\theta\cos 2\chi , \quad \rho_Q = -\frac{1}{4}\psi''\Delta\lambda_B^2\bar{G}\sin^2\theta\cos 2\chi , \quad (3.6)$$

$$\eta_U = -\frac{1}{4}\phi''\Delta\lambda_B^2\bar{G}\sin^2\theta\sin 2\chi , \quad \rho_U = -\frac{1}{4}\psi''\Delta\lambda_B^2\bar{G}\sin^2\theta\sin 2\chi , \quad (3.7)$$

$$\eta_V = -\eta_0\phi'\Delta\lambda_B\bar{g}\cos\theta , \quad \rho_V = -\eta_0\psi'\Delta\lambda_B\bar{g}\cos\theta . \quad (3.8)$$

En el perfil de absorción de intensidad hemos despreciado el término de orden 2 por ser menor que el de orden cero. Los perfiles de polarización lineal son de orden 2 y los de polarización circular de orden 1.

Resolviendo la ETR para el orden 0 del desarrollo obtenemos como solución el caso sin polarización, es decir, Q, U y V son nulos, ya que estamos despreciando los términos del campo magnético y, por tanto, no hay fuentes que generen dicha polarización.

Bajo la aproximación de campo débil limitamos el desarrollo al primer orden. De esta forma, la ETR a resolver queda reducida a un sistema de cuatro ecuaciones, donde las correspondientes a la polarización lineal (Stokes Q y U) están acopladas entre sí.

$$\frac{dQ}{d\tau} = \eta_I Q + \rho_V U , \quad \frac{dU}{d\tau} = \eta_I U + \rho_V Q \quad (3.9)$$

Esta pareja de ecuaciones para la polarización lineal (ec. 3.9) tiene como única solución $Q = U = 0$, ya que para profundidades ópticas muy grandes ($\tau \rightarrow \infty$) el recorrido libre medio de los fotones es muy pequeño y la emisión es la propia de un cuerpo negro, la cual sabemos que no está polarizada. Por tanto, en primer orden, no hay señales de polarización lineal.

Nos quedaría un sistema de dos ecuaciones, la de intensidad y la de polarización circular.

$$\frac{dI}{d\tau} = \eta_I(I - S) + \eta_V V \approx \eta_I(I - S) , \quad \frac{dV}{d\tau} = \eta_V(I - S) + \eta_I V \quad (3.10)$$

Como vemos, en la ecuación de la intensidad, hemos prescindido del término correspondiente a V por ser de orden superior y, por tanto, despreciable respecto al de la intensidad (que es de orden cero).

Tomamos ahora la ecuación de la intensidad y la derivamos respecto a la

longitud de onda

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda} \right) = \eta_0 \frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda} (I - S) + (1 + \eta_0 \phi(\lambda)) \frac{\partial I}{\partial \lambda},$$

la multiplicamos por el factor $-\Delta\lambda_B \bar{g} \cos \theta$ a ambos lados y, suponiendo que dicho factor es independiente de la profundidad óptica, manipulamos los términos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(-\Delta\lambda_B \bar{g} \cos \theta \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right) &= -\Delta\lambda_B \bar{g} \eta_0 \cos \theta \frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda} (I - S) \\ &\quad + (1 + \eta_0 \phi(\lambda)) \left(-\Delta\lambda_B \bar{g} \cos \theta \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right). \end{aligned}$$

Con ayuda de las expresiones para los perfiles de absorción (ecuaciones 3.5, 3.8) identificamos los términos η_I y η_V y, por comparación con la ecuación de transporte para la polarización circular (ec. 3.10), llegamos a

$$V(\lambda) = -\Delta\lambda_B \bar{g} \cos \theta \frac{\partial I(\lambda)}{\partial \lambda} \quad (3.11)$$

que es la ecuación de campo débil, la cual relaciona las señales de polarización circular con la derivada de la intensidad. Podemos observar, además, que solo la componente longitudinal del campo magnético B_{\parallel} es la que contribuye a la polarización circular a través de $\Delta\lambda_B$ y $\cos \theta$. Por tanto, nos es imposible conocer información de la componente transversal a partir de ella.

3.1.1 Relajando la aproximación: Desarrollo de orden superior. Polarización lineal.

Hay casos en los que, aunque se cumpla la condición para aplicar campo débil, necesitamos conocer las señales de polarización lineal por muy pequeñas que sean y, como hemos visto, un desarrollo de primer orden no es suficiente. Si extendemos el desarrollo hasta los términos de orden dos nos queda para las ecuaciones de Q y U

$$\frac{dQ}{d\tau} = \eta_I Q + \eta_Q (I - S) + \rho_V U + \rho_Q V \approx \eta_I Q + \eta_Q (I - S) \quad (3.12)$$

$$\frac{dU}{d\tau} = \eta_I U + \eta_U (I - S) - \rho_V Q + \rho_Q V \approx \eta_I U + \eta_U (I - S) \quad (3.13)$$

donde hemos despreciado los términos relativos a los perfiles de dispersión por ser de orden menor a los de los perfiles de absorción.

Eligiendo un sistema de referencia en el cual $\chi = 0$, obtenemos que $U = 0$

por la relación $U(\lambda)/Q(\lambda) = \tan 2\chi$ ¹. Por tanto, nos queda únicamente la resolución del transporte para Q . De la misma forma que hicimos para hallar la ecuación de campo débil (ec. 3.11), derivamos la ecuación de la intensidad respecto a la longitud de onda, aunque ahora lo hacemos dos veces:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right) = \eta_0 \frac{\partial^2 \phi(\lambda)}{\partial \lambda^2} (I - S) + 2\eta_0 \frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial I(\lambda)}{\partial \lambda} + (1 + \eta_0 \phi(\lambda)) \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2}.$$

Si consideramos velocidad constante, el segundo término de la ecuación se hace cero a la longitud de onda del centro de la línea¹. Multiplicando ambos miembros por $-\Delta\lambda_B^2 \bar{G} \sin^2 \theta \cos 2\chi/4$ y considerando que este factor es independiente de la profundidad óptica llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(-\frac{1}{4} \Delta\lambda_B^2 \bar{G} \sin^2 \theta \cos 2\chi \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right) &= -\frac{1}{4} \Delta\lambda_B^2 \bar{G} \sin^2 \theta \cos 2\chi \eta_0 \frac{\partial^2 \phi(\lambda)}{\partial \lambda^2} (I - S) + \\ &+ (1 + \eta_0 \phi(\lambda)) \left(-\frac{1}{4} \Delta\lambda_B^2 \bar{G} \sin^2 \theta \cos 2\chi \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right). \end{aligned}$$

Por comparación con la ecuación de transporte para Q e identificando, con ayuda de las ecuaciones 3.5, 3.6, los perfiles de absorción de I y Q , llegamos a

$$Q(\lambda) = -\frac{1}{4} \Delta\lambda_B^2 \bar{G} \sin^2 \theta \cos 2\chi \frac{\partial^2 I(\lambda)}{\partial \lambda^2} \quad (3.14)$$

que es la ecuación para la polarización lineal en Q para un desarrollo de orden 2. Podemos obtener la expresión para U multiplicando la ecuación por este otro factor $-\Delta\lambda_B^2 \bar{G} \sin^2 \theta \sin 2\chi/4$ (también independiente de la profundidad óptica) y comparándola con la ecuación de transporte de este parámetro, ayudándonos de las expresiones 3.5 y 3.7:

$$U(\lambda) = -\frac{1}{4} \Delta\lambda_B^2 \bar{G} \sin^2 \theta \sin 2\chi \frac{\partial^2 I(\lambda)}{\partial \lambda^2}. \quad (3.15)$$

Como vemos, en este caso, es la componente transversal del campo magnético B_{\perp} , y no la longitudinal, la que contribuye a las señales de polarización lineal a través de $\Delta\lambda_B$ y $\sin \theta$.

¹Para una demostración detallada de esta relación se puede consultar [Landi Degl'Innocenti & Landolfi \(2004\)](#)

3.1.2 Componentes del campo magnético en régimen de campo débil

A partir de las señales de polarización podemos recuperar las componentes del campo magnético. Llevando a cabo un ajuste por mínimos cuadrados con el que minimizamos los residuos, podemos despejar y hallar la componente longitudinal a partir de la polarización circular (ec. 3.11), mientras que la componente transversal la recuperamos a partir de la polarización lineal (ecs. 3.14, 3.15).

Consideramos una línea espectral de la cual conocemos su vector de Stokes en función de la longitud de onda, de forma que para cada valor de λ tenemos un valor de intensidad, I_i , uno de polarización circular, V_i , y dos de polarización lineal, Q_i y U_i . Podemos calcular el residuo de aplicar la ecuación de campo débil (ec. 3.11) como

$$R = \sum_{i=1}^N \left(V_i - m \left. \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right|_i \right)^2$$

donde i es el muestreo en longitud de onda, N el número de muestras y m el coeficiente de proporcionalidad de la aproximación $m = -\Delta\lambda_B \bar{g} \cos\theta = -k\lambda_0^2 \bar{g} B_{\parallel}$. La idea es hallar el valor de m que hace que este residuo sea lo menor posible (siendo por tanto, el valor que hace que más se acerque la aproximación de campo débil a los valores reales). Para ello calculamos la derivada respecto a este parámetro y la igualamos a cero.

$$\frac{\partial R}{\partial m} = -2 \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right|_i \left(V_i - m \left. \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right|_i \right) = 0$$

El valor óptimo de m es, por tanto

$$m \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right|_i^2 - \sum_{i=1}^N V_i \left. \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right|_i = 0 \quad \rightarrow \quad m = \frac{\sum_{i=1}^N V_i \left. \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right|_i}{\sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right|_i^2}$$

Como para una transición dada el valor de la longitud de onda central, λ_0 , y el factor de Landé efectivo, \bar{g} , son fijos, la única magnitud que tiene libertad es la componente longitudinal del campo, $B_{\parallel} = B \cos\theta$, y podemos obtener para ella, a partir de m

$$B_{\parallel} = -\frac{\sum_{i=1}^N V_i \left. \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right|_i}{C \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right|_i^2} \quad (3.16)$$

donde hemos agrupado todos los parámetros constantes en $C = k\bar{g}\lambda_0^2$.

De la misma forma, podemos obtener una expresión para la componente

transversal del campo magnético. En este caso, dado que la polarización lineal queda determinada por, no uno, si no dos parámetros, nos será de utilidad definir la polarización lineal neta, $L = \sqrt{Q^2 + U^2}$, y usarla, en vez de Q y U , para hallar esta componente del campo

$$L(\lambda) = \frac{1}{4} \Delta \lambda_B^2 \bar{G} \sin^2 \theta \left| \frac{\partial^2 I(\lambda)}{\partial^2 \lambda} \right|. \quad (3.17)$$

Minimizando el residuo entre L_i y la derivada segunda de I_i , igual que hicimos para la polarización circular, nos queda que el valor óptimo de m en este caso es el siguiente

$$R = \sum_{i=1}^N \left(L_i - m \left| \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right|_i \right)^2, \quad \frac{\partial R}{\partial m} = 0 \rightarrow m = \frac{\sum_{i=1}^N L_i \left| \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right|_i}{\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right|_i^2}.$$

En este caso es la componente transversal del campo, $B_{\perp} = B \sin \theta$, la única magnitud que introduce el grado de libertad en m , por tanto, despejando, obtenemos la siguiente expresión para ella:

$$B_{\perp} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N L_i \left| \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right|_i}{C' \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right|_i^2}}, \quad (3.18)$$

donde hemos agrupado todos los parámetros constantes en $C' = k^2 \lambda_0^4 \bar{G} / 4$.

Finalmente, sabiendo como hallar las componentes del campo, podemos conocer la intensidad, B , a partir de la suma de cuadrados:

$$B^2 = B_{\parallel}^2 + B_{\perp}^2. \quad (3.19)$$

3.2 Atmósferas Milne-Eddington

Las atmósferas Milne-Eddington son uno de los modelos más sencillos que podemos suponer a la hora de resolver la ETR sin limitar las magnitudes involucradas como se hace en el caso del campo débil. Estos modelos surgen de realizar las siguientes suposiciones:

- la atmósfera es semi-infinita, plano-paralela y se encuentra en ETL
- el vector campo magnético (\mathbf{B}), la anchura Doppler ($\Delta \lambda_D$), la velocidad a lo largo de la línea de visión (v_{LOS}) y los perfiles de absorción (ϕ) y dispersión (ψ) son independientes de la profundidad óptica, de forma que la matriz de propagación \mathbf{K} es constante con τ .

- la función fuente de la atmósfera tiene una dependencia lineal con la profundidad óptica:

$$S(\tau) = S_0 + S_1\tau \quad (3.20)$$

donde los parámetros S_0 y S_1 establecen el continuo y la profundidad de la línea espectral, respectivamente.

Bajo estas consideraciones, podemos llegar a una solución de la ETR de forma similar a como lo hicimos para el caso de luz no polarizada (sección 2.1).

3.2.1 Solución formal de la ETR para la formación de líneas en una atmósfera ME

Partimos de la ETR para luz polarizada (ec. 2.19) y, multiplicándola por la inversa de la matriz de propagación, la transformamos en una expresión más similar a 2.10.

$$\mathbf{K}^{-1}\mu \frac{d\mathbf{I}}{d\tau} = \mathbf{I} - \mathbf{S}$$

Si definimos $\mu' = \mathbf{K}^{-1}\mu$, podemos llegar a la misma solución para la radiación emergente que en ec. 2.12, ya que \mathbf{K} es constante con la profundidad óptica donde nos queda, haciendo uso de la forma funcional de la función fuente (ec. 3.20)

$$\mathbf{I}(0, \mu) = \frac{1}{\mu'} \int_0^\infty \mathbf{S}(t) e^{-t/\mu'} dt = \frac{1}{\mu'} \left[\int_0^\infty S_0 e^{-t/\mu'} dt + \int_0^\infty S_1 t e^{-t/\mu'} dt \right] \mathbf{U}$$

Resolviendo las integrales² de cada uno de los términos, deshaciendo el cambio para μ' y considerando que observamos en la dirección radial ($\mu = 1$) nos queda

$$\mathbf{I} = (S_0 \mathbf{1} + S_1 \mathbf{K}^{-1}) \mathbf{U} \quad (3.21)$$

siendo \mathbf{U} el vector unitario $(1, 0, 0, 0)^\dagger$ y $\mathbf{1}$ la matriz identidad.

La solución para cada uno de los parámetros de Stokes viene dada por las siguientes expresiones³ y se conocen como soluciones de Unno-Rachkovsky

²Las integrales a resolver son del tipo

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} \quad , \quad \int x e^{-x} dx = -(1+x)e^{-x}$$

³Las expresiones de las componentes de la matriz \mathbf{K}^{-1} pueden encontrarse en la Tabla 9.5 de Landi Degl'Innocenti & Landolfi (2004) (pág 413).

(Rachkovsky, 1962; Unno, 1956).

$$I = S_0 + S_1 \Delta^{-1} \eta_I [\eta_I^2 + \rho_Q^2 + \rho_U^2 + \rho_V^2] \quad (3.22)$$

$$Q = -S_1 \Delta^{-1} [\eta_I^2 \eta_Q - \eta_I (\eta_U \rho_V - \eta_V \rho_U) + \rho_Q (\eta_Q \rho_Q + \eta_U \rho_U + \eta_V \rho_V)] \quad (3.23)$$

$$U = -S_1 \Delta^{-1} [\eta_I^2 \eta_U - \eta_I (\eta_V \rho_Q - \eta_Q \rho_V) + \rho_U (\eta_Q \rho_Q + \eta_U \rho_U + \eta_V \rho_V)] \quad (3.24)$$

$$V = -S_1 \Delta^{-1} [\eta_I^2 \eta_V - \eta_I (\eta_Q \rho_U - \eta_U \rho_Q) + \rho_V (\eta_Q \rho_Q + \eta_U \rho_U + \eta_V \rho_V)] \quad (3.25)$$

siendo

$$\Delta = \eta_I^4 + \eta_I^2 (\rho_Q^2 + \rho_U^2 + \rho_V^2 - \eta_Q^2 - \eta_U^2 - \eta_V^2) - (\eta_Q \rho_Q + \eta_U \rho_U + \eta_V \rho_V)^2 \quad (3.26)$$

el determinante de la matriz de propagación.

En el continuo, donde la opacidad de la línea tiende a cero y la matriz de propagación es una matriz identidad, obtenemos para la intensidad

$$I_c = S_0 + S_1 \quad (3.27)$$

Los parámetros de Stokes obtenidos mediante las soluciones de Unno-Rachkovsky dependen de un total de nueve parámetros libres: la intensidad, inclinación y azimuth del campo magnético (B, θ, χ) , la velocidad en la línea de visión (v_{LOS}) , y cinco parámetros termodinámicos: el coeficiente de absorción de la línea relativo al continuo (η_0) , la anchura Doppler $(\Delta\lambda_D)$, el parámetro de amortiguamiento (a) y los parámetros de la función fuente, S_0 y S_1 .

3.2.2 Función fuente con exponenciales: modelos mME

Como hemos visto en la sección anterior, los modelos ME suponen que las magnitudes físicas no dependen de la profundidad y, por tanto, con ellos no somos capaces de obtener información sobre los gradientes de las magnitudes físicas. Esto implica que la aproximación no es capaz de reproducir asimetrías en los perfiles espectrales, las cuales surgen por la presencia de gradientes en el campo magnético y/o en la velocidad.

La cromosfera, tal y como mencionamos en la introducción de esta tesis (Capítulo 1), es una región altamente dinámica, de forma que podemos encontrar fuertes gradientes de campo magnético y velocidades, los cuales provocan asimetrías en las líneas. Además, el incremento de temperatura y la dominancia del campo magnético sobre la presión del gas, hace que no podamos trabajar en condiciones de ETL. Por todo esto, para que la aproximación ME sea aplicable a las líneas cromosféricas, es necesario llevar a cabo algunas modificaciones que permitan trabajar bajo estas condiciones.

Las principales suposiciones que nos limitan a la hora de usar modelos ME en la cromosfera son el ETL y la función fuente, que varía linealmente con τ . En trabajos previos (Lites et al., 1988) se ha estudiado la posibilidad de cambiar esa dependencia de la función fuente introduciendo exponenciales en su expresión funcional. De esta forma, nos quedaría⁴

$$S(\tau) = S_0 + S_1\tau + \sum_{i=1}^N A_i e^{-\alpha_i\tau} \simeq S_0 + S_1\tau + A_1 e^{-\alpha_1\tau} - A_2 e^{-\alpha_2\tau}, \quad (3.28)$$

donde la nueva función fuente añade dos nuevos parámetros por exponencial, A y α . Quedándonos con dos exponenciales ($N = 2$) introducimos cuatro nuevos parámetros que proporcionan mayor libertad al modelo siendo suficientes, según los resultados presentados por Lites et al. (1988), para reproducir líneas cromosféricas.

Estos modelos ME con una nueva función fuente los denominaremos modelos mME (de *modified Milne-Eddington*), los cuales nos llevan a expresiones analíticas diferentes a las soluciones de Unno-Rachkovsky para los parámetros de Stokes. Para llegar a ella, partimos nuevamente de la ecuación 2.12 y, sustituyendo la expresión de la nueva función fuente (ec. 3.28) y considerando nuevamente que observamos la radiación en la dirección radial, obtenemos

$$\mathbf{I} = \mathbf{K} \left[\int_0^\infty S_0 e^{-\mathbf{K}t} dt + \int_0^\infty S_1 t e^{-\mathbf{K}t} dt + \int_0^\infty A_1 e^{-(\alpha_1 \mathbf{1} + \mathbf{K})t} dt - \int_0^\infty A_2 e^{-(\alpha_2 \mathbf{1} + \mathbf{K})t} dt \right] \mathbf{U}$$

donde las nuevas integrales de la expresión son del mismo tipo que la del primer término, que ya resolvimos. La solución que obtenemos para este caso es

$$\mathbf{I} = \{S_0 \mathbf{1} + S_1 \mathbf{K}^{-1} + A_1 [\mathbf{1} - \alpha_1 (\alpha_1 \mathbf{1} + \mathbf{K})^{-1}] - A_2 [\mathbf{1} - (1 + \alpha_2) (\alpha_2 \mathbf{1} + \mathbf{K})^{-1}]\} \mathbf{U} \quad (3.29)$$

Vamos a hallar ahora las expresiones para cada uno de los parámetros de Stokes. Para ello, vamos a definir

$$\mathbf{D}(\alpha) = \alpha \mathbf{1} + \mathbf{K} \quad (3.30)$$

⁴Hemos cambiado el signo de la segunda exponencial por consistencia con el trabajo de Lites et al. (1988).

de forma que la expresión 3.29 nos quedaría

$$\mathbf{I} = \{S_0 \mathbf{1} + S_1 \mathbf{K}^{-1} + A_1 [\mathbf{1} - \alpha_1 \mathbf{D}(\alpha_1)^{-1}] - A_2 [\mathbf{1} - (1 + \alpha_2) \mathbf{D}(\alpha_2)^{-1}]\} \mathbf{U}$$

De la multiplicación por el vector unitario \mathbf{U} vemos que a cada uno de los parámetros de Stokes solo contribuye la primera columna de cada matriz, de forma que para cada uno de ellos tendremos

$$\begin{aligned} I = & S_0 + S_1 \Delta^{-1} \eta_I [\eta_I^2 + \rho_Q^2 + \rho_U^2 + \rho_V^2] + A_1 [1 - \alpha_1 d_{00}(\alpha_1)] \\ & - A_2 [1 - (1 + \alpha_2) d_{00}(\alpha_2)] \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} Q = & -S_1 \Delta^{-1} [\eta_I^2 \eta_Q - \eta_I (\eta_U \rho_V - \eta_V \rho_U) + \rho_Q (\eta_Q \rho_Q + \eta_U \rho_U + \eta_V \rho_V)] \\ & - A_1 \alpha_1 d_{01}(\alpha_1) + A_2 (1 + \alpha_2) d_{01}(\alpha_2) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} U = & -S_1 \Delta^{-1} [\eta_I^2 \eta_U - \eta_I (\eta_V \rho_Q - \eta_Q \rho_V) + \rho_U (\eta_Q \rho_Q + \eta_U \rho_U + \eta_V \rho_V)] \\ & - A_1 \alpha_1 d_{02}(\alpha_1) + A_2 (1 + \alpha_2) d_{02}(\alpha_2) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} V = & -S_1 \Delta^{-1} [\eta_I^2 \eta_V - \eta_I (\eta_Q \rho_U - \eta_U \rho_Q) + \rho_V (\eta_Q \rho_Q + \eta_U \rho_U + \eta_V \rho_V)] \\ & - A_1 \alpha_1 d_{03}(\alpha_1) + A_2 (1 + \alpha_2) d_{03}(\alpha_2) \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde $d_{0j}(\alpha)$ son los elementos de la primera columna de la matriz $\mathbf{D}(\alpha)^{-1}$. Para conocer las expresiones de esos elementos basta darse cuenta que tenemos la misma matriz, solo que sumamos a los elementos de la diagonal una cantidad α , de forma que

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha + \eta_I & \eta_Q & \eta_U & \eta_V \\ \eta_Q & \alpha + \eta_I & \rho_V & -\rho_U \\ \eta_U & -\rho_V & \alpha + \eta_I & \rho_Q \\ \eta_V & \rho_U & -\rho_Q & \alpha + \eta_I \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Por tanto, podemos deducir que las expresiones $d_{0j}(\alpha)$ son las mismas que las de la inversa de la matriz de propagación haciendo el cambio $\eta_I \rightarrow \alpha + \eta_I$, quedándonos

$$d_{00}(\alpha) = \Delta^{-1}(\alpha) (\alpha + \eta_I) [(\alpha + \eta_I)^2 + \rho_Q^2 + \rho_U^2 + \rho_V^2]$$

$$\begin{aligned} d_{01}(\alpha) = & -\Delta^{-1}(\alpha) [(\alpha + \eta_I)^2 \eta_Q + (\alpha + \eta_I) (\eta_U \rho_V - \eta_V \rho_U) \\ & + \rho_Q (\eta_Q \rho_Q + \eta_U \rho_U + \eta_V \rho_V)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{02}(\alpha) &= -\Delta^{-1}(\alpha)[(\alpha + \eta_I)^2\eta_U + (\alpha + \eta_I)(\eta_V\rho_Q - \eta_Q\rho_V) \\
&\quad + \rho_U(\eta_Q\rho_Q + \eta_U\rho_U + \eta_V\rho_V)] \\
d_{03}(\alpha) &= -\Delta^{-1}(\alpha)[(\alpha + \eta_I)^2\eta_V + (\alpha + \eta_I)(\eta_Q\rho_U - \eta_U\rho_Q) \\
&\quad + \rho_V(\eta_Q\rho_Q + \eta_U\rho_U + \eta_V\rho_V)] \tag{3.36}
\end{aligned}$$

donde $\Delta(\alpha)$ es el determinante de la misma matriz, del cual deducimos su expresión a partir de la del determinante de \mathbf{K} de la misma forma

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha) &= (\alpha + \eta_I)^4 + (\alpha + \eta_I)^2(\rho_Q^2 + \rho_U^2 + \rho_V^2 - \eta_Q^2 - \eta_U^2 - \eta_V^2) \\
&\quad - (\eta_Q\rho_Q + \eta_U\rho_U + \eta_V\rho_V)
\end{aligned}$$

Esta solución se reduce a las de Unno-Rachkovsky para el caso $A_1 = A_2 = 0$, es decir, un modelo ME clásico con función fuente lineal. La intensidad del continuo ($\mathbf{K} \sim \mathbf{1}$) viene dada por

$$I_c = S_0 + S_1 + \frac{A_1}{1 + \alpha_1} \tag{3.37}$$

Cabe mencionar que, para el núcleo de la línea ($\kappa_L \rightarrow \infty$), la intensidad puede expresarse como

$$I_{core} = S_0 + A_1 - A_2 \tag{3.38}$$

de donde se deduce que los modelos mME pueden reproducir emisiones de los perfiles si se cumple que $A_2 < A_1$.

Si las soluciones de Unno-Rachkovsky dependían de nueve parámetros libres, las de los modelos mME dependen de trece: los nueve anteriores más los cuatro nuevos parámetros de la función fuente, A_1 , α_1 , A_2 , y α_2 .

Hemos realizado una comparación entre un ajuste siguiendo la aproximación ME y otro según la mME. Para ello, hemos usado una línea sintética de Mg I b2 a 517.2 nm generada a partir de una simulación magnetohidrodinámica (MHD) realista (ver Sec.4.3). La figura 3.1 muestra la comparación entre ambos ajustes. Vemos que el ME es un perfil de Voigt típico y no reproduce el perfil sintético, mientras que usando la aproximación mME, se ajusta bien la línea, reproduciendo el estrechamiento del núcleo y las alas más anchas. Podemos apreciar una pequeña diferencia entre el ajuste en las alas azul y roja del perfil. Esto se debe a que la línea no es simétrica, mientras que la aproximación mME solo es capaz de generar perfiles simétricos. En la tabla 3.1 mostramos los resultados obtenidos para los parámetros libres del ajuste siguiendo ambas aproximaciones.

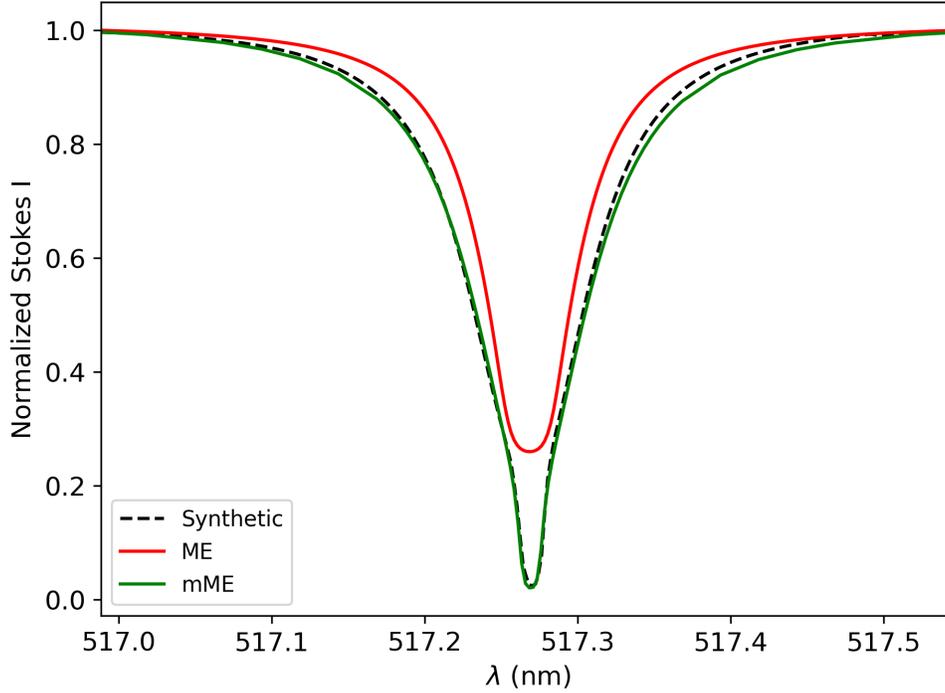


Figura 3.1: Perfil normalizado de Stokes I correspondiente a la línea de Mg I b2 a 517.2 nm. El trazo discontinuo corresponde al perfil sintético generado a partir de las simulaciones MHD (ver Sec. 4.3), mientras que los trazos sólidos son de los ajustes: el rojo corresponde con el ajuste ME y el verde con el ajuste mME. Los parámetros obtenidos para cada modelo se encuentran en la tabla 3.1. Figura extraída de [Dorantes-Montegudo et al. \(2022\)](#).

3.2.3 Funciones Respuesta en una atmósfera mME

Uno de los puntos fuertes de los modelos ME es poder derivar funciones respuesta de forma analítica. Las funciones respuesta dan información sobre cómo cambian los perfiles de Stokes ante variaciones de una magnitud física dada y se definen como la derivada parcial del parámetro de Stokes respecto a dicha magnitud física ([Orozco Suárez & Del Toro Iniesta, 2007](#)). Estos autores han demostrado una importante propiedad de las atmósferas ME a través de la interpretación de funciones respuesta: en modelos ME, la sensibilidad de los perfiles de Stokes a perturbaciones en el campo magnético está completamente descorrelacionada de las perturbaciones en la velocidad y en los parámetros termodinámicos ([del Toro Iniesta et al., 2010](#); [del Toro Iniesta & Ruiz Cobo, 2016](#)). Esto implica que los modelos ME son robustos para calcular campos magnéticos y velocidades. Sin embargo, existe bastante incertidumbre en la determinación de los parámetros termodinámicos dado que sus funciones res-

Tabla 3.1: Parámetros libres obtenidos de los ajustes usando los modelos ME y mME.

	S_0	S_1	η_0	$\Delta\lambda_D$	a	A_1	α_1	A_2	α_2
ME	0.23	0.70	12.0	0.08	0.16	-	-	-	-
mME	0.30	0.60	90.17	0.03	0.20	-0.41	0.18	0.2	98.18

puesta muestran claras degeneraciones (*trade-offs*⁵) entre ellas.

Tal y como hemos mencionado anteriormente, la aproximación mME con $N = 2$ exponenciales tiene cuatro nuevos parámetros termodinámicos, de forma que son necesarios un total de trece parámetros libres para describir estos modelos. De la misma forma que con los nueve parámetros libres de los modelos ME, podemos calcular analíticamente las funciones respuesta de estos cuatro nuevos parámetros y ver qué influencia tienen sobre los perfiles. Para ello, solo tenemos que derivar las expresiones 3.31-3.34 respecto a ellos.

Las funciones respuesta relativas a los parámetros de la primera exponencial de la función fuente, A_1 y α_1 , vienen dadas por:

$$\frac{\partial I}{\partial A_1} = 1 - \alpha_1 d_{00}(\alpha_1) \quad ; \quad \frac{\partial I}{\partial \alpha_1} = -A_1 d_{00}[1 - \alpha_1 d_{00}(\alpha_1)] \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial A_1} = -\alpha_1 d_{01}(\alpha_1) \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} = A_1 \alpha_1 d_{01}^2(\alpha_1) \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial U}{\partial A_1} = -\alpha_1 d_{02}(\alpha_1) \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} = A_1 \alpha_1 d_{02}^2(\alpha_1) \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial V}{\partial A_1} = -\alpha_1 d_{03}(\alpha_1) \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = A_1 \alpha_1 d_{03}^2(\alpha_1) \quad (3.42)$$

De la misma forma, las relativas a los parámetros de la segunda exponencial, A_2 and α_2 , son:

$$\frac{\partial I}{\partial A_2} = (1 + \alpha_2) d_{00}(\alpha_2) - 1 \quad ; \quad \frac{\partial I}{\partial \alpha_2} = A_2 d_{00}(\alpha_2)[1 - (1 + \alpha_2) d_{00}(\alpha_2)] \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial A_2} = (1 + \alpha_2) d_{01}(\alpha_2) \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} = -A_2 (1 + \alpha_2) d_{01}^2(\alpha_2) \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial U}{\partial A_2} = (1 + \alpha_2) d_{02}(\alpha_2) \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} = -A_2 (1 + \alpha_2) d_{02}^2(\alpha_2) \quad (3.45)$$

⁵En Orozco Suárez & Del Toro Iniesta (2007) el término "*trade-offs*" se usa para hacer referencia a las correlaciones entre los cambios en las diferentes magnitudes físicas y su influencia en los parámetros de Stokes.

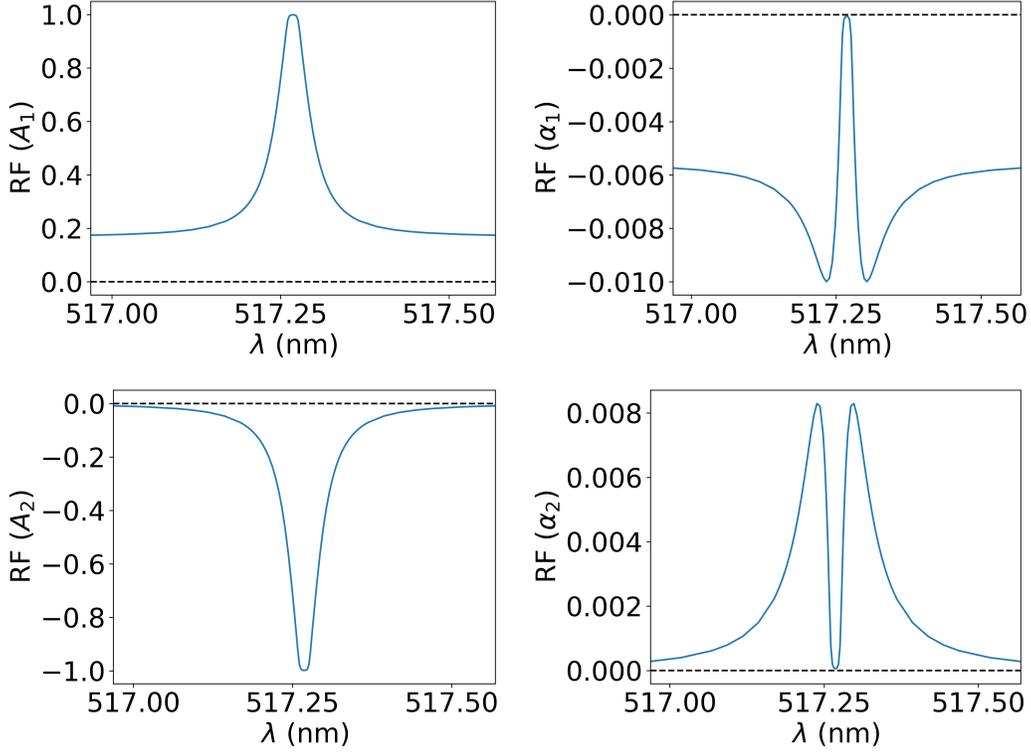


Figura 3.2: Funciones respuesta mME adimensionales de Stokes I para la línea de Mg I b2 siguiendo el ajuste de la tabla 3.1. De izquierda a derecha y de arriba a abajo: Función respuesta para A_1 , α_1 - Ecs. (3.39), A_2 y α_2 - Ecs. (3.43), respectivamente. La línea discontinua representa la respuesta nula. Figura extraída de Dorantes-Monteagudo et al. (2022).

$$\frac{\partial V}{\partial A_2} = (1 + \alpha_2)d_{03}(\alpha_2) \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = -A_2(1 + \alpha_2)d_{03}^2(\alpha_2) \quad (3.46)$$

A pesar de que en los modelos mME hay mayor riesgo de encontrar diálogos en las funciones respuesta entre los parámetros termodinámicos, el campo magnético y la velocidad a lo largo de la línea de visión, no se muestran signos de que las haya. La figura 3.2 muestra las funciones respuesta a los cuatro nuevos parámetros para el perfil de Stokes I en el Mg I b2, las cuales han sido calculadas a partir de las expresiones analíticas usando los valores de la tabla 3.1. Cada una de ellas nos enseña cómo estos parámetros modifican la forma de los perfiles permitiendo acomodarse a formas típicas que se encuentran en la cromosfera. Podemos apreciar que el papel que juega cada una de las exponenciales de la función fuente es el siguiente: la primera exponencial contribuye a reproducir posibles emisiones en el centro de la línea a través de

A_1 y a ensanchar las alas por medio de α_1 ; la segunda exponencial incrementa el contraste entre la línea y el continuo por medio de A_2 y contribuye a estrechar los perfiles en el entorno del centro de la línea a partir del parámetro α_2 .

Comparando estas funciones respuesta con las presentadas en [Orozco Suárez & Del Toro Iniesta \(2007\)](#), podemos afirmar que estos nuevos parámetros no presentan correlaciones con los parámetros termodinámicos, el campo magnético, ni con la velocidad.

Capítulo 4

El modelo mME para interpretar la cromosfera

Como hemos visto en el capítulo anterior, la aproximación mME proporciona una solución analítica y simple de la ETR. Esto permite que pueda implementarse en códigos de inversión de forma sencilla y podamos obtener información física del plasma solar mediante ajustes espectropolarimétricos sin requerir un tiempo de cómputo excesivo, tal y como ocurre con las inversiones NETL de la ETR, las cuales son mucho más lentas y costosas computacionalmente.

En este capítulo, basado en el artículo [Dorantes-Monteagudo et al. \(2022\)](#), presentaremos algunos de los resultados obtenidos mediante la aplicación de estos modelos a datos sintéticos de simulaciones MHD. Para ello, hemos implementado el modelo mME, incluyendo los términos de las exponenciales como parámetros libres a ajustar y modificando la solución de la ETR (ec. 3.29), en los códigos LMpyMilne¹ (LMfit Inversion in a Milne-Eddington atmosphere) y MILOS² ([Orozco Suárez & Del Toro Iniesta, 2007](#)). Ambos códigos están basados en el algoritmo de Levenberg-Marquardt para minimizar el residuo en los perfiles de Stokes a la hora de ajustarlos.

4.1 Precedentes

Como ya mencionamos, los modelos mME fueron presentados por [Lites et al. \(1988\)](#) para resolver el problema del transporte para un átomo de dos niveles: el Mg I b2. Los autores llegaron a la conclusión de que una sola exponencial

¹El código, escrito en Python, ha sido desarrollado por C. Diaz Baso y se puede encontrar en <https://github.com/cdiazbas/LMpyMilne>

²Disponible para IDL (Interactive Data Language) en <https://github.com/vivivum/MilosIDL>

era suficiente para reproducir el triplete del Mg I b. Además apuntaron que la nueva función fuente era bastante similar a la original.

Para comprobar la validez de la aproximación, tomaron un modelo de umbra semiempírico (Lites et al., 1987; Maltby et al., 1986) y consideraron un campo magnético constante a la hora de sintetizar los perfiles del átomo. A partir de ahí, realizaron inversiones en el centro de la línea aplicando diferentes configuraciones iniciales para probar la validez de la nueva aproximación: usaron una y dos exponenciales, cambiaron parámetros fijos y libres, etc. Las dos conclusiones más destacables de su trabajo fueron:

- para reproducir los perfiles del Mg I b2, no eran necesarias dos exponenciales en la función fuente, con una era suficiente.
- para recuperar las magnitudes físicas del modelo original de forma satisfactoria, era necesario invertir los cuatro parámetros del vector de Stokes usando diferentes pesos entre ellos: 0.01 para el Stokes I y 0.1 para los Stokes Q , U , y V .

Los autores justificaron la necesidad de usar las cuatro componentes del vector de Stokes en la inversión como medio para reducir los *trade-offs* entre los parámetros termodinámicos. Además, los autores mostraron que, en régimen de campo débil, existía cierta correlación entre la sensibilidad a la intensidad de campo magnético y el coeficiente de absorción de la línea respecto al continuo.

Basados en esta idea de Lites et al. (1988), el propósito de este trabajo es indagar bajo qué condiciones es posible reproducir la forma de los perfiles cromosféricos usando modelos mME y ver qué información podemos extraer de ellos.

4.2 Validez del modelo mME

Para evaluar la validez de la aproximación mME en líneas cromosféricas vamos a considerar diferentes escenarios. Primero vamos a estudiar la convergencia y unicidad de la solución usando perfiles obtenidos mediante ajustes mME (Sec. 4.2.1). Después, generamos perfiles de Stokes realistas con RH, el código de síntesis NETL (Uitenbroek, 2001, 2003), con las siguientes condiciones: el rango espectral en longitud de onda va desde -400 hasta +400 mÅ en torno al centro de la línea, con un muestreo de 10 mÅ; aplicamos condiciones de redistribución completa (CRD), ya que los efectos de redistribución parcial (PRD) son despreciables en el caso del Mg I b2 (Quintero Noda et al., 2018) (Sec. 4.2.2).

4.2.1 Convergencia y unicidad de la solución frente al ruido

Aunque la aproximación mME puede escribirse analíticamente, es necesario el uso de técnicas de inversión para extraer información de las magnitudes físicas a partir de los perfiles de Stokes, es decir, necesitamos un procedimiento que minimice el residuo entre los perfiles sintéticos (asociados a un modelo de atmósfera dado) y los observados. La ausencia de *trade-offs* entre los diferentes parámetros proporciona seguridad para su determinación, sin embargo, el algoritmo de inversión puede introducir incertidumbres durante el proceso. Por ejemplo, es posible que dicho algoritmo no sea lo suficientemente robusto como para lidiar con el gran número de parámetros que hay que ajustar o con las señales de ruido que incluyen las observaciones. Por tanto, para comprobar la robustez del código, hemos generado un conjunto de 100 000 perfiles de Stokes bajo condiciones mME a los que hemos introducido ruido aleatorio de magnitud $10^{-3}I_c$, $0.5 \times 10^{-3}I_c$, y $10^{-4}I_c$.

Los modelos de atmósfera con los que hemos generado los perfiles tenían una distribución de campo magnético cuya intensidad variamos entre 0 y 1500 G y la inclinación y azimuth entre 0° y 180° . El campo de velocidades en la línea de visión también lo variamos modelo a modelo entre -2 km s^{-1} y $+2 \text{ km s}^{-1}$. Tanto el campo magnético como la velocidad en LOS son constantes con la altura. Los parámetros termodinámicos se dejan variar de forma aleatoria a un 20% de sus valores iniciales, que son: $S_0 = 0.06$, $S_1 = 0.86$, $\eta_0 = 900$, $\Delta\lambda_D = 0.56$, $a = 0.03$, $A_1 = 0.74$, $\alpha_1 = 11.42$, $A_2 = 0.76$, and $\alpha_2 = 25.58$.

Todas las pruebas se realizaron con la línea de Mg I b2 a 517.3 nm, de forma que los parámetros termodinámicos obtenidos son aquellos que mejor reproducen esta línea. A lo largo de la línea tenemos un total 100 muestras separadas 0.3 pm. Durante la inversión permitimos un máximo de 100 iteraciones y, al contrario que [Lites et al. \(1988\)](#), no necesitamos aplicar diferentes pesos, ya que los pesos variables son necesarios si los perfiles de Stokes presentan asimetrías.

Los resultados de la inversión pueden verse en la figura 4.1. La desviación cuadrática media (RMS) depende de la cantidad de ruido que aplicamos a los perfiles simulados. En particular, para campos magnéticos más intensos que 200 Gauss, la RMS es de ≈ 37 , 19, y 4 G para niveles de ruido de $10^{-3}I_c$, $0.5 \times 10^{-3}I_c$, y $10^{-4}I_c$, respectivamente. Para campos más débiles, los valores de RMS son de ≈ 80 , 53, y 18 G, aunque la mayor contribución al error proviene de una clara desviación del valor medio para la intensidad de campo inferida, la cual, para señales de ruido de $10^{-3}I_c$ se sobrestima en algo más de 100 G cuando el campo es menor de 200 G. Por otro lado, la desviación

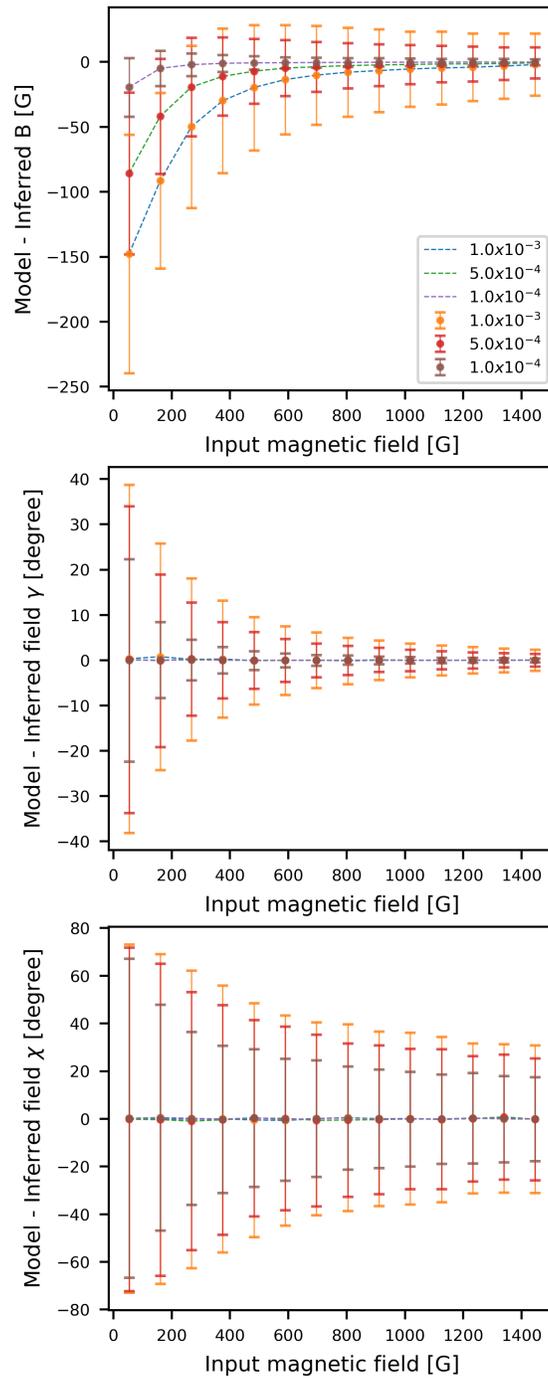


Figura 4.1: De arriba a abajo, los paneles muestran los errores para la intensidad de campo magnético, la inclinación y el azimuth resultantes de la inversión de 100 000 perfiles de Stokes con diferentes niveles de ruido. La línea discontinua muestra el valor promedio de desviación respecto a los datos de entrada y las barras de error representan la desviación estándar. Figura extraída de [Dorantes-Monteagudo et al. \(2022\)](#).

es prácticamente despreciable cuando a los perfiles de Stokes se les añaden señales de ruido de $10^{-4}I_c$.

Para la inclinación del campo, las desviaciones respecto de la media crecen monótonamente a medida que el campo se va haciendo menor. Para campos mayores de 200 G, toma, en promedio, valores de 6.5° , 4.2° , y 1.4° para señales de ruido de $10^{-3}I_c$, $0.5 \times 10^{-3}I_c$, y $10^{-4}I_c$, respectivamente.

Por último, el azimuth es la magnitud más afectada por el ruido, con valores de RMS mayores de 20 grados en todos los casos.

4.2.2 Comparación con modelos cromosféricos estándar

Una vez hemos estudiado la convergencia y unicidad del modelo, vamos a probar la robustez de la aproximación mME frente a perfiles de Stokes realistas. Tomamos un modelo de atmósfera FALC (Fontenla et al., 1993), al cual añadimos diferentes configuraciones de campo magnético y a partir de él sintetizamos los perfiles de Stokes de Mg I b2 con RH. En los modelos, estas configuraciones de campo que introducimos tienen intensidades entre 100 y 1500 G, en pasos de 100 G, con inclinaciones de 0° , 45° , y 90° , y azimuth constante a cero grados.

Realizamos 100 ajustes mME para cada una de las configuraciones mencionadas usando la misma inicialización para cada una, pero introduciendo en los perfiles sintéticos señales de ruido aleatorio de magnitud $0.5 \times 10^{-3}I_c$. Además, para introducir una fuente adicional de comparación, aplicamos la aproximación de campo débil (WFA – del inglés *Weak Field Approximation*) en los diferentes regímenes: campos poco intensos, intermedios y fuertes.

En la figura 4.2 se muestra la intensidad de campo magnético promedio que resulta de los 100 ajustes para cada modelo usando mME (panel superior) y WFA (panel inferior), ambos representados frente a la intensidad de entrada.

En el caso de la aproximación mME, las intensidades de campo inferidas están ligeramente sobreestimadas para campos horizontales (90°) y las desviaciones respecto de los valores de entrada, en términos de errores relativos, alcanzan hasta el 13% para los campos más débiles y en torno al 6.7% para los más intensos. Para inclinaciones intermedias (45°) y campos longitudinales (0°), la intensidad de campo está ligeramente subestimada. Este comportamiento ya lo advirtieron Lites et al. (1988) en su trabajo. Sin embargo, para las inclinaciones intermedias, ellos obtenían errores de en torno al 9% después de incluir las cuatro componentes del vector de Stokes en la inversión, mientras que en nuestro caso, los valores inferidos se subestiman hasta un 3% con independencia de la intensidad de campo magnético. Estas desviaciones menores pueden deberse a que estamos considerando una ventana espectral más amplia que Lites et al. (1988). Es importante remarcar también que los

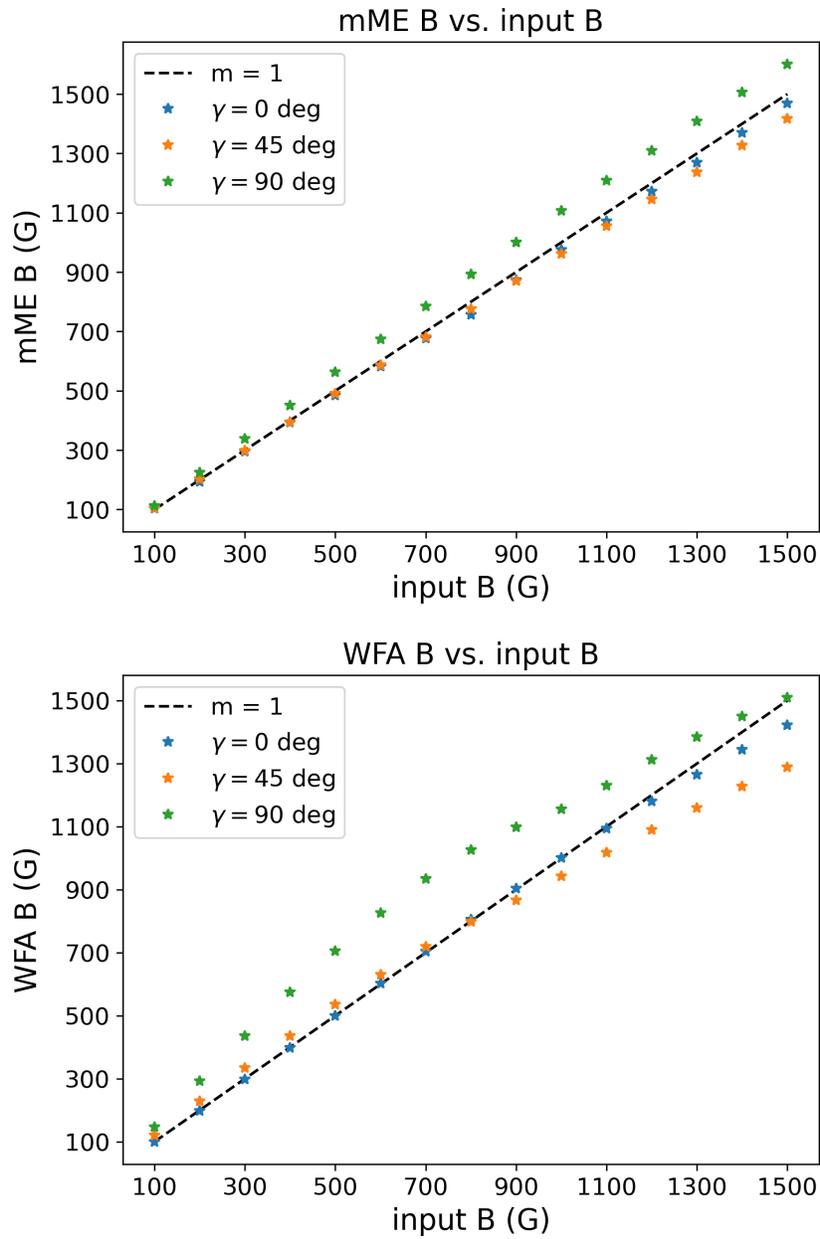


Figura 4.2: Intensidad de campo magnético inferida vs. la de entrada correspondientes a la aproximación mME (panel superior) y a la WFA (panel inferior), para diferentes inclinaciones de campo, θ . La línea negra discontinua representa la pendiente unidad. Figura extraída de [Dorantes-Monteagudo et al. \(2022\)](#).

errores calculados para las 100 inversiones son muy pequeños (del orden de 1 G), lo que significa que las desviaciones respecto a los valores de entrada no se deben a que los ajustes sean buenos.

El panel inferior de la figura 4.2 muestra las limitaciones de la WFA cuando la aplicamos a perfiles realistas. Puede verse cómo los valores inferidos de la aproximación se desvían significativamente de los valores de entrada para intensidades superiores a 1000 G e inclinaciones de 90° y 45°. Para campos verticales (0°), la desviación es ligeramente mayor que en el caso mME. Sin embargo, vemos que los errores son cada vez más significativos a medida que la intensidad de campo aumenta, en parte debido a la componente transversal, ya que, como vimos en la Sec. 3.1.2, es una componente de segundo orden en la aproximación, a diferencia de la longitudinal.

De forma general, podemos decir que la aproximación mME ha arrojado mejores resultados que la WFA para las diferentes configuraciones de campo magnético. Sin embargo, la aproximación muestra ciertas limitaciones, ya que encontramos desviaciones de hasta 200 G para inclinaciones horizontales.

4.2.3 Determinación de la función fuente

Lites et al. (1988) ya mostraron que la función fuente que obtenían era bastante similar a la del modelo original, lo cual abría una puerta a determinar temperaturas a partir de modelos mME. Sin embargo, nosotros hemos encontrado ciertas discrepancias entre ambas funciones fuente (ver Fig. 4.3). La razón es que los modelos mME consideran una matriz de propagación (\mathbf{K}) constante con la profundidad óptica, lo cual no sería suficiente para reproducir las formas de las líneas cromosféricas. La aproximación hace uso de las exponenciales en la función fuente para reproducir esa forma sin tener en cuenta la física de la formación de líneas, de ahí que la función fuente del modelo mME se desvíe de la original. Sin embargo, la aproximación puede reproducir de forma satisfactoria los perfiles siempre que sean simétricos.

En la figura 4.3 mostramos una comparación entre la función fuente inferida con el modelo mME para dos intensidades de campo diferentes y la función fuente original obtenida a partir de la síntesis de los perfiles con RH. La función fuente mME es una magnitud termodinámica y, tal y como hemos visto en la sección 3.2.3, no presenta *trade-offs* con el campo magnético. De ahí que las dos funciones fuente mME sean tan similares entre ellas, a excepción de la pequeña desviación en torno a $\log \tau = -1.0$. Sin embargo, difieren bastante con la original. A parte de que ambas tienden a decrecer a medida que subimos en la atmósfera, en las mME encontramos, por ejemplo, una joroba en torno a $\log \tau = -1.2$, mientras que en la función fuente original la encontraríamos a $\log \tau = -2.5$, pero con una amplitud mucho menor.

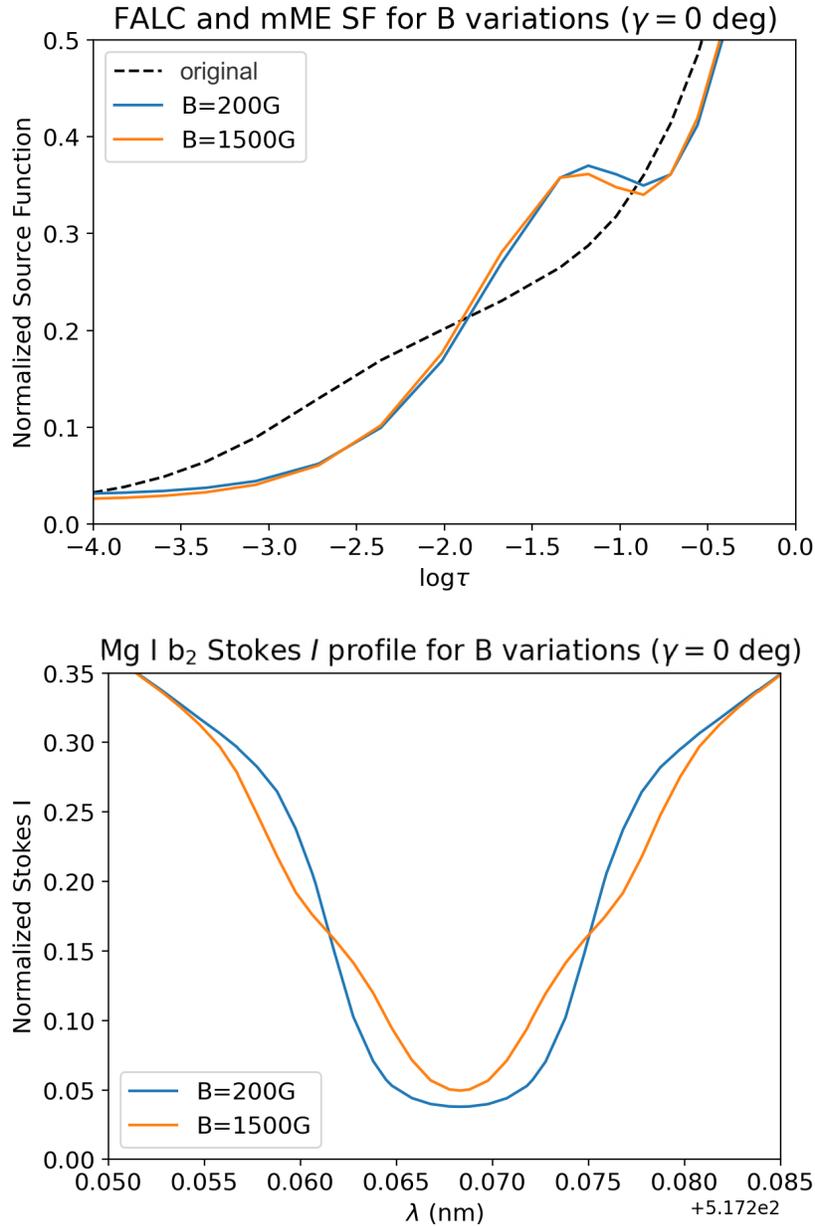


Figura 4.3: Función fuente mME (arriba) y perfiles de intensidad asociados (abajo) correspondientes al menor (200 G; trazo azul) y el mayor (1500 G; trazo naranja) valor de intensidad de campo magnético introducidos en el modelo FALC. La línea discontinua es el panel de arriba corresponde a la función fuente original, calculada a partir de la síntesis con RH. El panel inferior solo muestra el rango correspondiente al centro de la línea. Figura extraída de [Dorantes-Monteagudo et al. \(2022\)](#).

4.3 Comparación frente a modelos MHD realistas

Hemos tomado una simulación 3D radiativa y magnetohidrodinámica generada con el código *Bifrost* (Carlsson et al., 2016; Gudiksen et al., 2011). Las dimensiones físicas del cubo original son de $24 \text{ Mm} \times 24 \text{ Mm} \times 16.8 \text{ Mm}$ con una separación de 48 km en la dirección horizontal y de 19 km en la vertical. El modelo abarca desde 2.4 Mm de profundidad por debajo de la fotosfera (zona de convección alta) hasta unos 14.4 Mm sobre ella, incluyendo la cromosfera y parte de la corona.

El campo magnético en la simulación tiene una estructura bipolar que se observa, a alturas fotosféricas, como dos concentraciones de campo magnético de intensidad similar y polaridades opuestas.

Para llevar a cabo nuestro estudio, hemos seleccionado una porción del cubo de 100×100 pixels. La región seleccionada está centrada en la concentración de campo de polaridad negativa. El área contiene puntos tanto con campo magnético intenso, como con campos débiles, de forma que vamos a poder estudiar la aproximación mME en un amplio rango de intensidades. Hemos representado la temperatura del modelo a una profundidad óptica $\log \tau = -3.0$ (altura de formación estimada para el Mg I b2 – ver Sec. 4.3.1) en la figura 4.4, donde hemos marcado también la región que seleccionamos para nuestro estudio.

A partir de estas simulaciones, Quintero Noda et al. (2018) sintetizaron el triplete de Mg I b (b1, b2, y b4) y la línea de Ca II 854.2 nm con RH, con un muestreo en longitud de onda de 10 mÅ. Estos perfiles sintéticos, correspondientes a la región seleccionada, son los que usamos para nuestro trabajo. A partir de ellos inferiremos la velocidad a lo largo de la línea de visión y el vector campo magnético usando la aproximación mME.

La inversión mME se lleva a cabo pixel a pixel, obteniendo para cada uno de ellos las siguientes magnitudes: intensidad de campo magnético (B), inclinación (θ), azimuth (χ), la velocidad LOS (v_{LOS}), el coeficiente de absorción de línea respecto al continuo (η_0), el coeficiente de amortiguamiento (a), la anchura Doppler ($\Delta\lambda_D$), y los seis parámetros que describen la función fuente mME (ver Sec. 3.2.2). Cada inversión se repite tres veces: en la primera, inicializamos el modelo con valores aleatorios; una vez obtenidos los resultados, calculamos el promedio espacial de cada una de las magnitudes y lo usamos como inicialización para la segunda inversión; volvemos a promediar y usamos los resultados de la misma forma para una tercera inversión.

Las primeras inversiones mostraron que si la inicialización de los parámetros termodinámicos era muy diferente de los valores del modelo original, el código

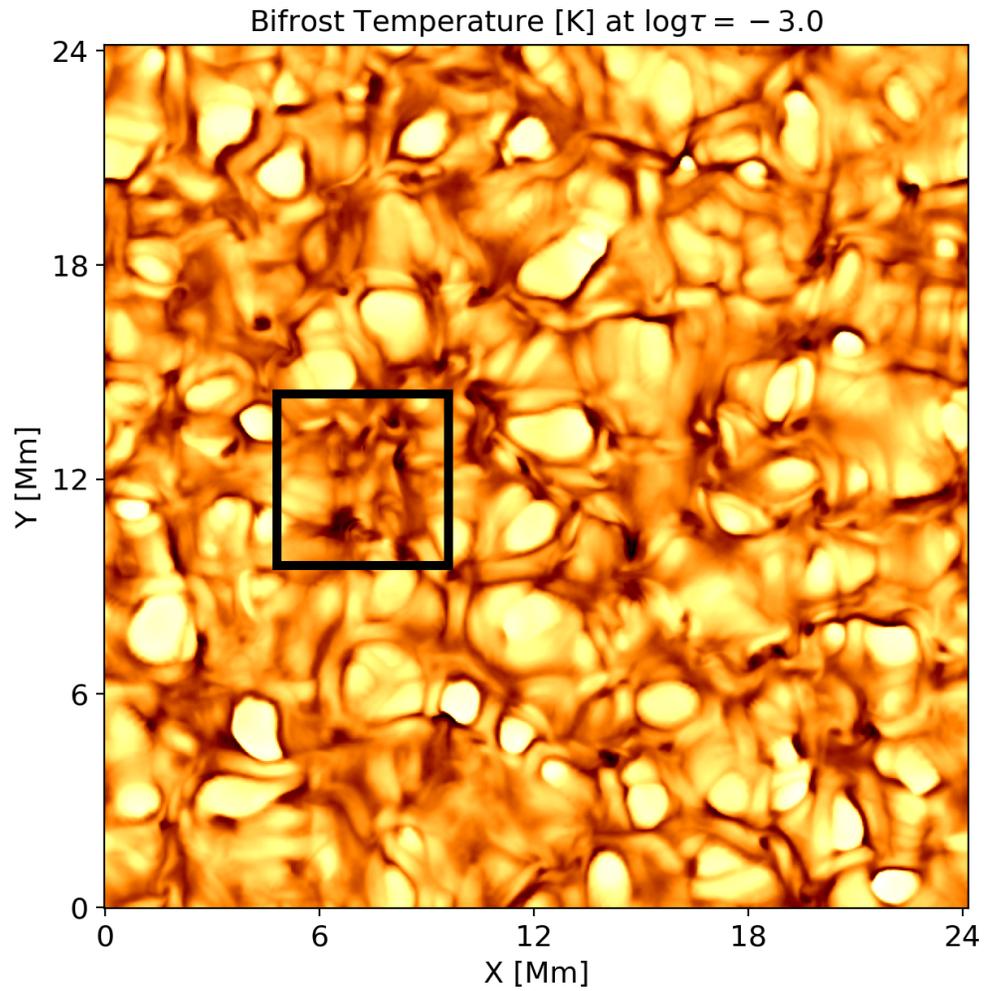


Figura 4.4: Mapa de temperatura (en Kelvin – K) de la simulación MHD ([Gudiksen et al., 2011](#)) a una profundidad óptica de $\log \tau = -3.0$. Hemos representado el campo de visión completo y, encuadrado en negro, la región que usaremos para el análisis de este trabajo.

no convergía hacia la solución correcta. Esto ocurría para un gran número de píxeles, de ahí que hayamos decidido repetir la inversión tres veces usando el promedio espacial de las magnitudes como inicialización. De esta forma, estamos ayudando al código a alcanzar una mejor convergencia y a aproximarse a la solución correcta para todos los píxeles, aunque ello nos cueste tiempo de cómputo. Es importante remarcar que estos tests se han realizado sin tener en cuenta la influencia de fuentes de ruido provenientes de los procesos de medida (como la difracción de los telescopios o los muestreos limitados) ni el ruido fotónico.

Compararemos los resultados obtenidos en esta inversión con el modelo de atmósfera original, pero en escala de profundidad óptica, no geométrica, el cual se ha obtenido durante la síntesis espectral (Quintero Noda et al., 2018). Además, para mayor completitud, los resultados obtenidos con el código mME los compararemos también con los que se obtienen de aplicar la aproximación de campo débil (WFA - Sec. 3.1) para la intensidad e inclinación del campo magnético. En el caso de la velocidad en la línea de visión, compararemos los resultados con los que se obtienen usando la técnica del centro de gravedad – CoG (Semel, 1967).

4.3.1 Intensidad de campo magnético

Comenzaremos con el análisis de los resultados de la intensidad de campo magnético. En la figura 4.5 mostramos los mapas de intensidad de campo magnético de la simulación correspondientes a $\log \tau_{500} = -3.0$ y $\log \tau_{500} = -5.0$, que son las profundidades ópticas con las que obtenemos una menor RMS al comparar los mapas obtenidos mediante la inversión mME para las líneas de Mg I b2 y Ca II 854.2, respectivamente. En términos geométricos, estas profundidades ópticas corresponden a un amplio rango de kilómetros en la atmósfera, para la cual obtenemos una altura promedio de ~ 460 km en el caso del Mg I b2 y de ~ 880 km en el Ca II 854.2. Tal y como era de esperar, el Ca II 854.2 proporciona información de capas más altas que el Mg I b2.

En la figura mostramos también los mapas de intensidad de campo para ambas líneas obtenidos mediante mME y WFA. En los mapas mME, esta magnitud la hemos obtenido de forma directa como uno de los parámetros a ajustar durante la inversión, mientras que en el caso del WFA, hemos tenido que calcularlo a partir de las componentes longitudinal y transversal – Ecs. (3.16) y (3.18), respectivamente – haciendo uso de $B = \sqrt{B_{\parallel}^2 + B_{\perp}^2}$. Por consistencia con mME, estas componentes han sido obtenidas aplicando la WFA a todo el rango espectral, aunque de forma estricta las expresiones presentadas para la polarización lineal (3.14, 3.15, 3.17) son válidas únicamente en el centro de la

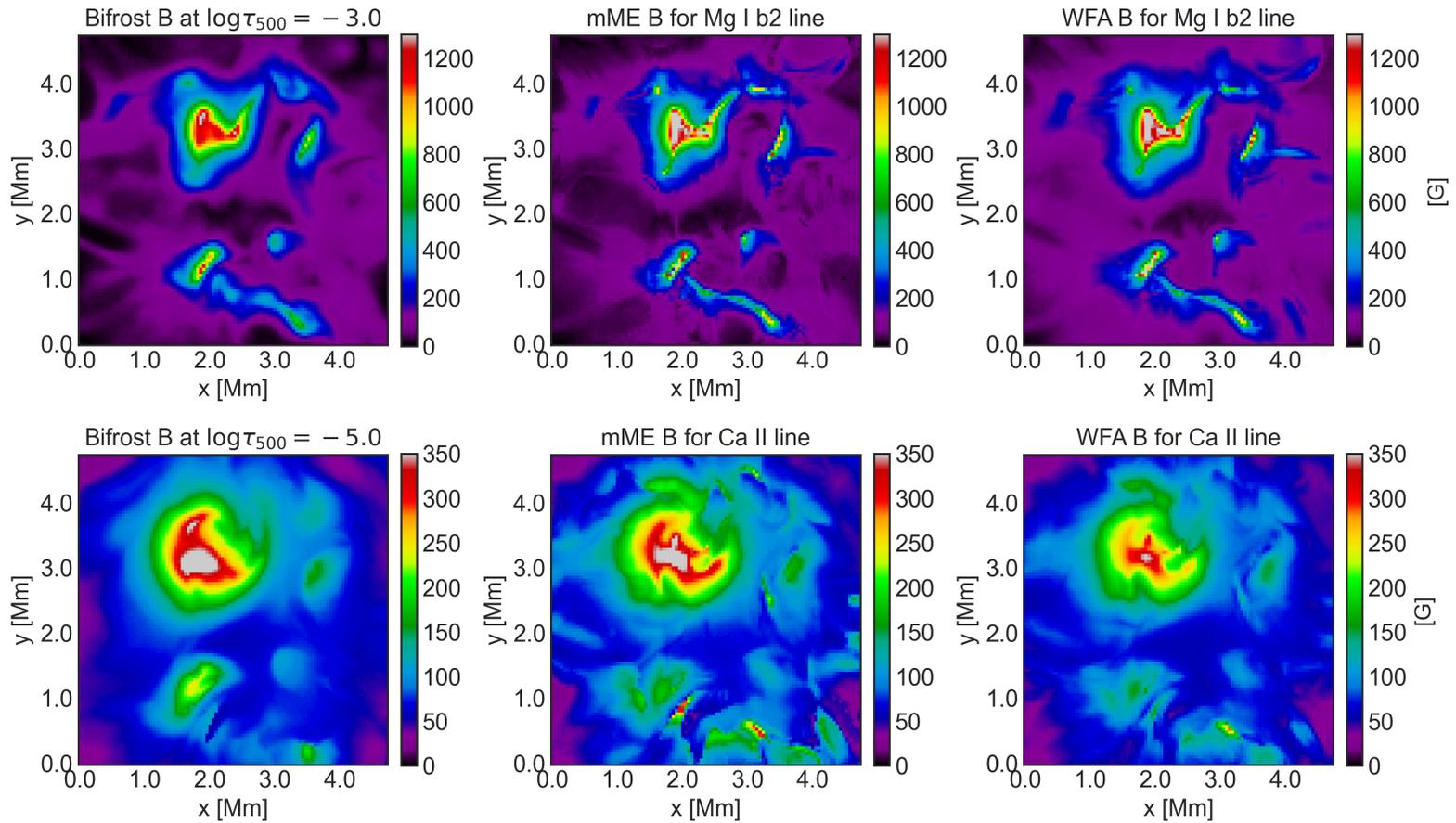


Figura 4.5: Mapas de intensidad de campo magnético en la región de interés para la simulación de Bifrost (paneles izquierdos), aproximación mME (centrales), y WFA (paneles de la derecha). La fila superior corresponde a los mapas obtenidos usando la línea de Mg I b2 y la inferior la de Ca II 854.2 nm. Los mapas de Bifrost se han seleccionado a partir de profundidades ópticas estimadas según los resultados mME ($\log \tau_{500} = -3.0$ para el Mg I b2 y $\log \tau_{500} = -5.0$ para el Ca II). Figura extraída de [Dorantes-Monteaugudo et al. \(2022\)](#).

línea³.

La similitud entre los mapas mME y WFA con los de las simulaciones es bastante significativa pero, observando en detalle, existen ciertas discrepancias. Por ejemplo, los mapas obtenidos con ambas aproximaciones muestran valores ligeramente mayores en las regiones donde hay concentraciones de campo en el caso de la línea de Mg I b2, mientras que para el Ca II 854.2, esto solo ocurre en mME. De la misma forma, los campos inferidos para el Ca mediante mME muestran campos más intensos que con WFA⁴.

Hemos representado, por otro lado, los histogramas 2D, comparando las intensidades de campo mME, WFA, y las de las simulaciones (ver figura 4.6). Podemos ver que la dispersión es bastante grande para ambos métodos cuando comparamos con los valores del modelo original, lo que hace destacar el hecho de que todos estos valores inferidos no los podemos asignar a una misma altura, si no que la región en la que la línea es sensible al campo magnético abarca un amplio rango de alturas geométricas. Los histogramas representados en la parte inferior de la figura muestran una buena correlación entre las aproximaciones mME y WFA en el caso del Mg I b2, mientras que para la línea de CaII 854.2, el mME proporciona campos más intensos que WFA. Esto puede observarse también en la figura 4.5, donde en el mapa correspondiente a WFA se muestran valores menores que en el mapa mME, especialmente en las regiones donde hay concentraciones de campo.

Cabe destacar que el problema de transporte bajo condiciones mME es una aproximación más fuerte que WFA, ya que esta última está limitada a regiones donde el campo es suficientemente débil como para que el desplazamiento Zeeman sea mucho menor que la anchura Doppler de la línea.

La similitud entre los mapas de campo inferidos que mostramos indican que la WFA es adecuada para estudiar campos longitudinales usando líneas cromosféricas en regiones de campo débil. Sin embargo, debemos tener en cuenta que en regiones en las que las condiciones de campo débil no se satisfacen (es decir, donde el perfil de Stokes V no sea proporcional a la componente longitudinal del campo), WFA no se ajustará adecuadamente y no proporcionará buenos resultados. Esto puede ocurrir debido a la física subyacente, como puede ser la presencia de regiones de campo intenso, o por ciertos efectos instrumentales, como aquellos que pueden ensanchar la línea, introduciendo desviaciones lineales y provocando, por tanto, inferencias erróneas en los campos longitudinales. En este sentido, es de esperar que mME proporcione re-

³En la comunidad el uso de esta expresión para el rango completo de las líneas está bastante extendido incluso sin necesidad de justificación física alguna ([Landi Degl'Innocenti, 1992](#))

⁴De hecho, en este caso, obtenemos una RMS ligeramente menor con el campo WFA que con el mME.

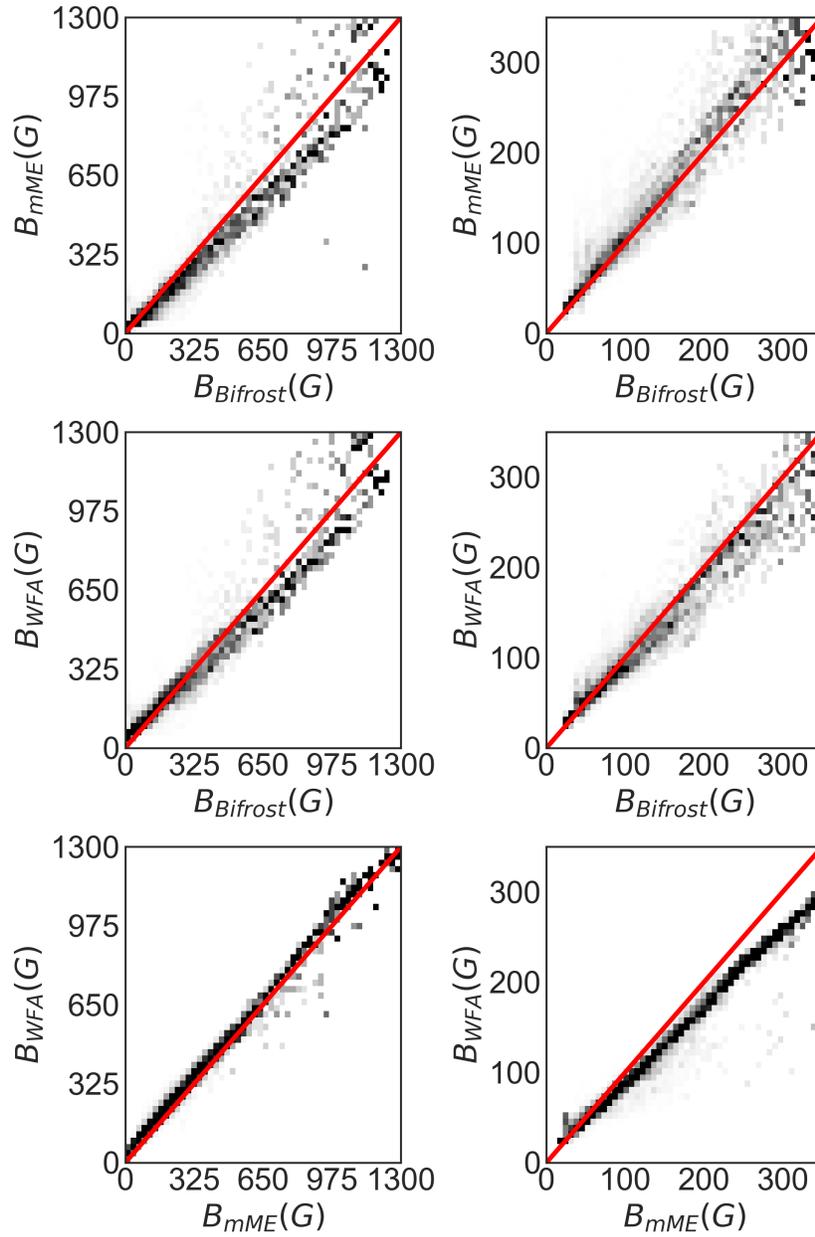


Figura 4.6: Histogramas bidimensionales de intensidad de campo magnético estimados a partir de las líneas de Mg I b2 (columna izquierda) y Ca II 854.2 (columna derecha). Los paneles superiores muestran los resultados obtenidos mediante mME frente a los datos de Bifrost; los centrales muestran los resultados WFA, también frente a Bifrost; y los inferiores corresponden a los resultados obtenidos mediante mME frente a WFA. Figura extraída de [Dorantes-Monteagudo et al. \(2022\)](#).

sultados más precisos que WFA, dado que no está restringido por este tipo de limitaciones.

4.3.2 Inclinación del campo magnético

Los resultados obtenidos para las inclinaciones de campo se muestran en la figura 4.7. Al igual que para la intensidad de campo, la figura muestra los mapas de las inclinaciones tomadas de la simulación a la misma profundidad óptica, al igual que las inclinaciones inferidas de las aproximaciones mME y WFA para ambas líneas.

Tal y como mencionamos previamente, la inclinación del campo magnético θ es una de las magnitudes que invertimos al aplicar un modelo mME. Sin embargo, al aplicar WFA debemos hallar la inclinación de forma indirecta a partir de las componentes del campo (al igual que hicimos con la intensidad). En este caso, la relación que aplicamos para hallarla es la siguiente:

$$\theta = \arctan \left(\frac{B_{\perp}}{B_{\parallel}} \right) \quad (4.1)$$

Atendiendo nuevamente a la figura, vemos que las estructuras magnéticas aparecen más compactas en los mapas de Mg I b2 que en los de Ca II. Esto se debe a la apertura del campo y el consiguiente incremento de la inclinación a medida que subimos en la atmósfera. Los mapas de Mg I b2 muestran campos más verticales por el hecho de que esta línea se forma en regiones más profundas.

En la figura 4.8, mostramos histogramas de inclinaciones mME frente a las de Bifrost para ambas líneas. En ambos casos podemos observar una clara correlación entre la atmósfera mME y la original. Ambas líneas muestran ciertas discrepancias para inclinaciones en torno a los 90° , es decir, campos horizontales. Esto se debe al hecho de que la mayoría de esos campos horizontales se asocian a campos débiles en regiones donde las estratificaciones verticales cambian drásticamente. Esto da lugar a fuertes asimetrías en los perfiles de polarización lineal (Stokes Q y U), por lo que la aproximación mME no es capaz de ajustarlos como es debido.

4.3.3 Velocidad a lo largo de la línea de visión

Como ya mencionábamos antes, los resultados obtenidos para las velocidades a lo largo de la línea de visión los compararemos, además de con los datos originales, con los valores obtenidos de aplicar la técnica del centro de gravedad (CoG) a los perfiles.

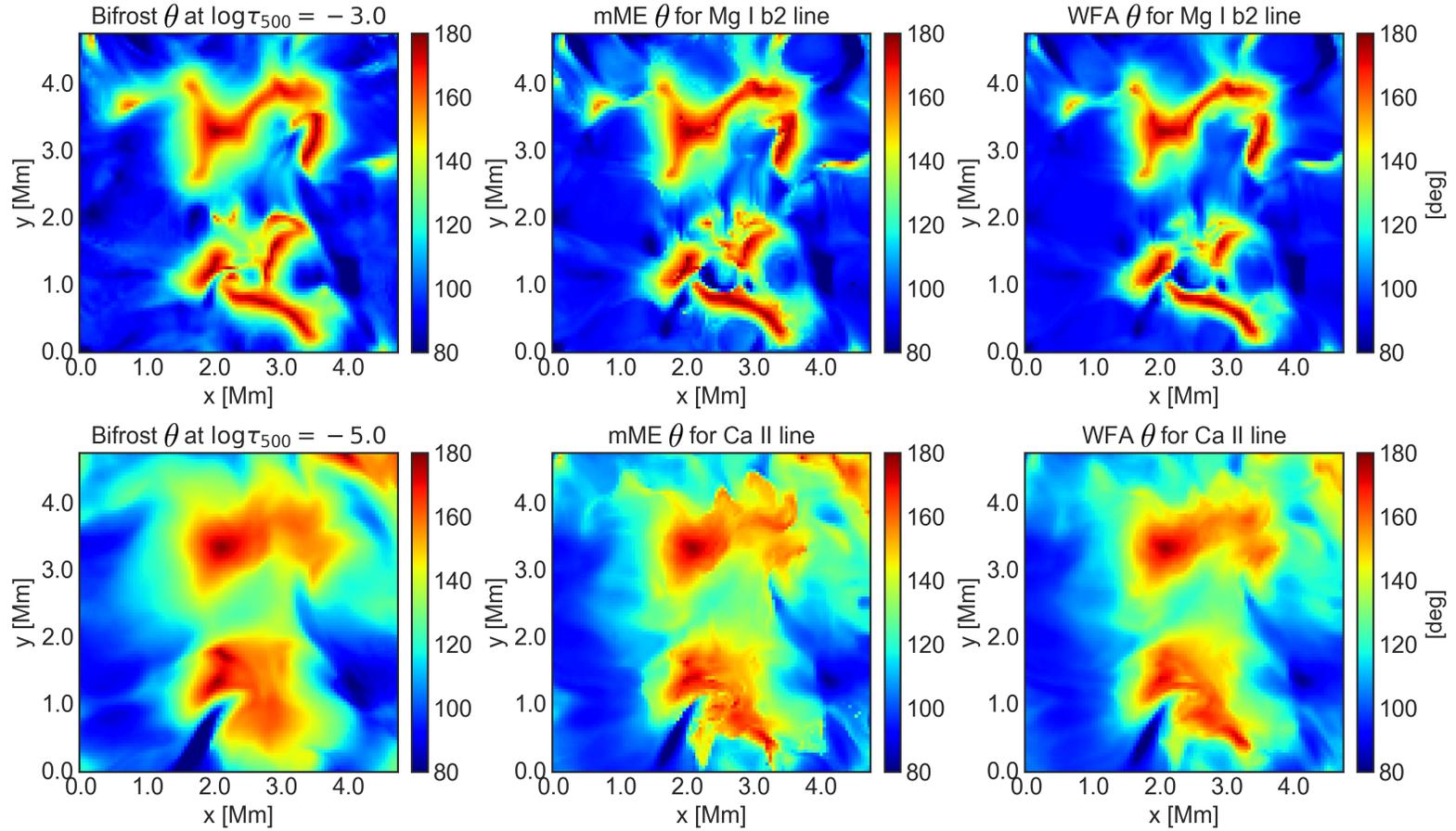


Figura 4.7: Mapas de inclinación del campo magnético θ de la región de estudio (en grados). La primera fila representa la inclinación correspondiente al Mg I b2 y la segunda al CaII 854.2. Izquierda: θ de Bifrost a la altura de formación estimada para cada línea; Central: θ invertida mediante mME; Derecha: θ invertida usando WFA. Las alturas de formación se han estimado a partir del campo magnético obtenido con mME. Figura extraída de [Dorantes-Monteagudo et al. \(2022\)](#).

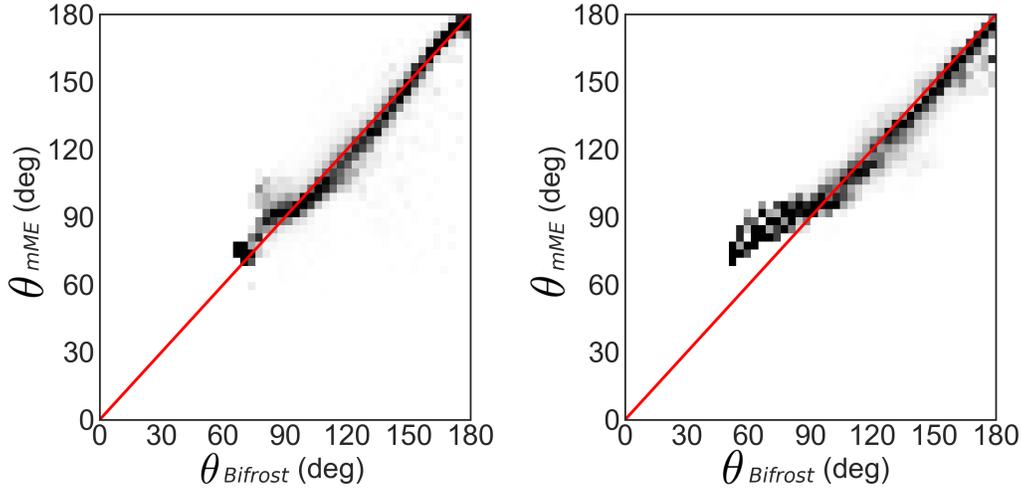


Figura 4.8: Histograma bidimensional normalizado de inclinaciones (en grados) para la línea de Mg I b2 (izquierda) y la de Ca II 584.2 (derecha). Hemos representado los resultados mME frente a los de Bifrosta cada altura de formación estimada. Figura extraída de [Dorantes-Monteagudo et al. \(2022\)](#).

Cuando una línea se genera en un medio que está en movimiento, la velocidad de ese medio provoca que la longitud de onda de esa línea se desplace. Dependiendo de si el medio se aleja o se acerca, hablaremos de desplazamientos al rojo (*redshift* – la línea se desplaza a longitudes de onda mayores) o desplazamientos al azul (*blueshift*– la línea se desplaza a longitudes de onda menores), respectivamente.

La técnica del CoG consiste en estimar velocidades a partir del desplazamiento de la longitud de onda central de una línea espectral (la posición de su centro de gravedad) respecto de su longitud de onda natural λ_0 . Según [Uitenbroek \(2003\)](#) y las referencias que encontramos en su trabajo (como [Semel, 1967](#)), la velocidad LOS se puede determinar de la siguiente manera

$$v_{CoG} = \frac{c(\lambda_0 - \lambda_{CoG})}{\lambda_0}, \quad (4.2)$$

donde λ_{CoG} se define como

$$\lambda_{CoG} = \frac{\int \lambda(I_c - I)d\lambda}{\int (I_c - I)d\lambda}, \quad (4.3)$$

siendo I_c la intensidad del continuo; I la intensidad a una longitud de onda λ dada; y c la velocidad de la luz.

En la figura [4.9](#) podemos ver los mapas de velocidad LOS para las líneas

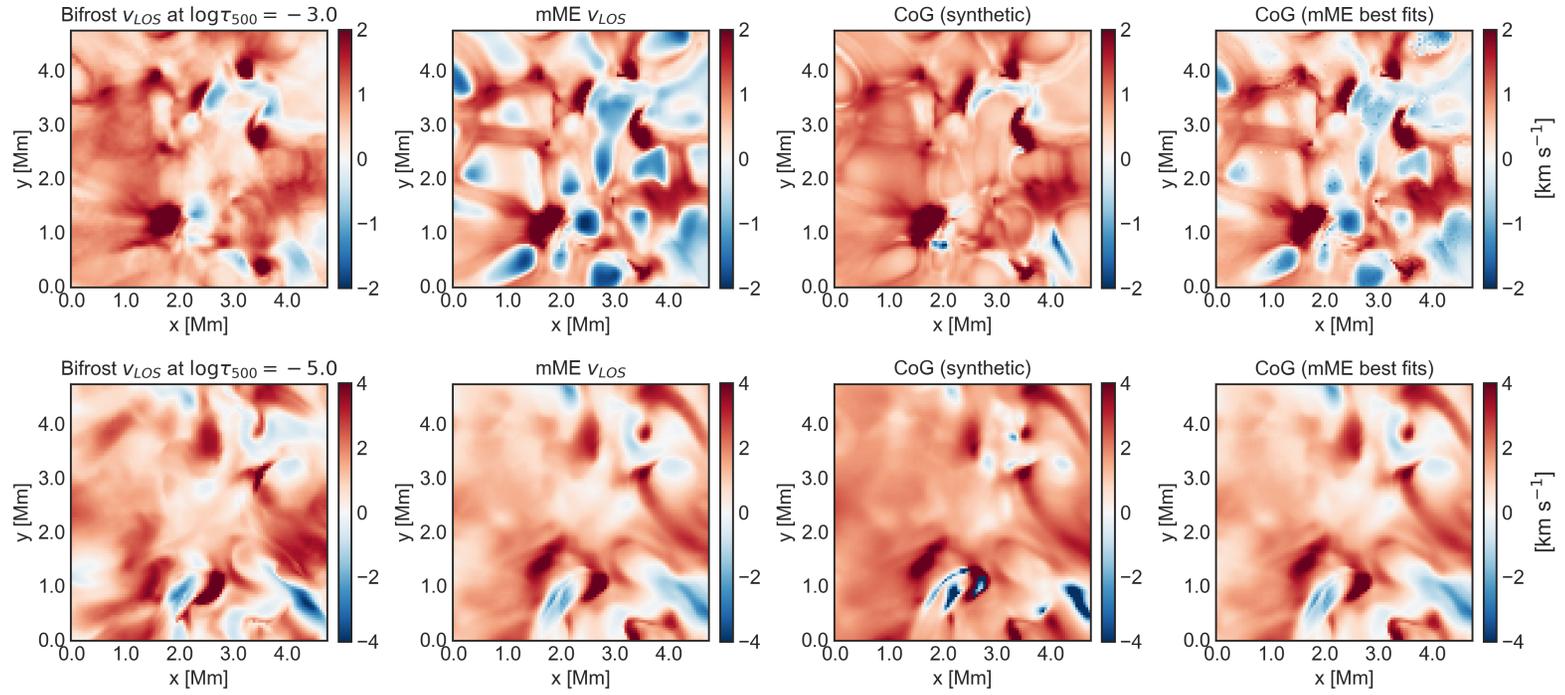


Figura 4.9: Mapas de velocidad a lo largo de la línea de visión para el Mg I b2 (fila superior) y para el Ca II 854.2 (inferior). De izquierda a derecha: Bifrost, inversión mME, CoG aplicada a los perfiles sintéticos, y CoG aplicada a los perfiles mME. Figura extraída de [Dorantes-Montegudo et al. \(2022\)](#).

de Mg I b2 y Ca II 854.2 correspondientes a la simulación, la inversión mME, y la técnica CoG aplicada a los perfiles sintéticos y a los perfiles mME resultantes del mejor ajuste.

Los mapas de velocidad mME para el Mg I b2 muestran un claro patrón de granulación, típico de la fotosfera, el cual no se aprecia en el mapa de Bifrost a $\log \tau_{500} = -3.0$. En este caso, la técnica CoG aplicada a los perfiles sintéticos proporcionan resultados más similares a los originales, mientras que volvemos a encontrar la granulación en los resultados obtenidos de aplicarla a los perfiles mME. Estas diferencias tan claras se deberían a las asimetrías que pueden presentar los perfiles de intensidad, las cuales no se tienen en cuenta en la aproximación mME y los perfiles que obtenemos son completamente simétricos.

Para el Ca II, los mapas de velocidad muestran un aspecto más propio de la cromosfera. Las grandes estructuras se recuperan bien pero, a pequeña escala, existen claras diferencias entre el mapa mME y el de la simulación. Los resultados del CoG también parecen ser consistentes con el mapa de velocidad original, salvo por la presencia de algunas pequeñas estructuras con fuertes corrimientos al azul que no aparecen en las simulaciones.

Para terminar, puede verse también que al aplicar CoG a los perfiles obtenidos del mejor ajuste mME, recuperamos las velocidades inferidas de la inversión bastante bien en ambas líneas. No podemos decir lo mismo de aplicar CoG a los perfiles sintéticos, ya que siempre aparecen ciertas diferencias respecto a mME. Estos resultados, aunque pueden ser obvios, resaltan la influencia de las asimetrías de las líneas espectrales a la hora de determinar la longitud de onda CoG, ya que estas no se tienen en cuenta en el uso de mME y los perfiles obtenidos son completamente simétricos.

Capítulo 5

Las Ecuaciones de Equilibrio Estadístico. El factor de anisotropía para el Mg I b2 según modelos mME.

Una de las finalidades de este trabajo es estudiar las señales de polarización generadas en una transición de línea por fenómenos de dispersión. Para ello, es necesario conocer las poblaciones de los niveles involucrados en las transiciones atómicas de interés para poder saber cómo interaccionarán con el campo de radiación incidente y, sobre todo, qué efectos tendrán sobre este.

Como ya vimos en la Sección 2.2, en un plasma en Equilibrio Termodinámico (local o global) los niveles de ionización y excitación de las especies atómicas que lo componen se pueden determinar a partir de las ecuaciones de Saha y Boltzmann. Sin embargo, cuando nos encontramos en situaciones de no equilibrio (NETL), como es el caso de la cromosfera, los resultados obtenidos con estas ecuaciones difieren de las poblaciones reales, y será necesario resolver las Ecuaciones de Equilibrio Estadístico (EEE). Típicamente, las EEE se resuelven en condiciones estacionarias, donde dan lugar a un sistema de ecuaciones algebraico cuyas incógnitas serán los elementos de la matriz de densidad que describe las poblaciones de los niveles del átomo.

En este capítulo resolveremos las EEE para la línea de Mg I b2 a 517.2 nm (ver Tabla 5.1). Para ello, seguiremos considerando los modelos mME como aproximación, teniendo en cuenta los procesos físicos de absorción y emisión más influyentes en las poblaciones y despreciando aquellos cuyo efecto es más irrelevante.

Lower	g_l	Upper	g_u	λ_0 (Å)	A_{ul} (s ⁻¹)	B_{lu} (W ⁻¹ m ³ s ⁻¹)
³ P ₂	3/2	³ S ₁	2	5183.60	5.61E+7	1.87E-09
³ P ₁	3/2	³ S ₁	2	5172.68	3.37E+7	1.11E-09
³ P ₀	2	³ S ₁	2	5167.32	1.13E+7	2.78E-10

Tabla 5.1: Parámetros de las transiciones atómicas que generan el triplete Mg I b. Todos los datos han sido obtenidos de la Atomic Spectra Database de NIST: https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html, o calculados a partir de ellos. Usaremos los datos de la transición ³P₁ - ³S₁ que es la correspondiente a la línea Mg I b2.

5.1 La matriz de densidad y el tensor de radiación.

Para describir las poblaciones de los niveles de un átomo que se encuentra en condiciones NETL es necesario utilizar matrices de densidad, cuyas componentes describen los subniveles de la especie atómica y sus estados polarizados. Sus elementos se calculan como el valor esperado del operador asociado a dicha matriz, entre dos subniveles magnéticos.

$$\rho_{MM'} = \langle JM | \hat{\rho} | JM' \rangle \quad (5.1)$$

Es común trabajar con los multipolos del operador densidad, de forma que podemos definir el tensor esférico irreducible¹ asociado a la matriz de densidad, ρ_Q^K , como

$$\rho_Q^K(J) = \sum_{MM'} (-1)^{J-M} \sqrt{2K+1} \begin{pmatrix} J & J & K \\ M & -M' & -Q \end{pmatrix} \rho_{MM'} \quad (5.2)$$

donde

- $0 \leq K \leq 2J$ y representa el rango del tensor. Un tensor esférico irreducible de rango K tiene $2K + 1$ componentes.
- $-K \leq Q \leq K$, que es la proyección de K .

El tensor irreducible de la matriz de densidad posee tres momentos de especial interés, que son:

¹Para saber más sobre las matrices de densidad y los tensores esféricos, ver los capítulos 2 y 3 de [Landi Degl'Innocenti & Landolfi \(2004\)](#)

- ρ_0^0 representa la población total del nivel J .
- ρ_0^1 es la orientación atómica. En ausencia de campo magnético, este término vale 0 si la radiación que ilumina el átomo está despolarizada y tiene simetría axial.
- ρ_0^2 es el alineamiento atómico, el cual representa las diferencias entre las poblaciones de los subniveles. Además está asociado a la anisotropía del campo de radiación, la cual definiremos más adelante.

De forma análoga, podemos describir el campo de radiación a través de tensores esféricos irreducibles. Definimos así el tensor del campo de radiación como

$$J_Q^K = \oint \sum_{i=0}^3 \mathcal{T}_Q^K(i, \mathbf{\Omega}) I_{\nu,i}(\tau, \mathbf{\Omega}) \frac{d\mathbf{\Omega}}{4\pi} \quad (5.3)$$

donde $I_{\nu,i}$ representa la componente i del vector de Stokes ($i = 0, 1, 2, 3$ para Stokes I, Q, U , y V , respectivamente) a la frecuencia ν , y \mathcal{T}_Q^K es el tensor que contiene la geometría y del cual hablaremos más adelante. Igual que hemos hecho con los momentos de la matriz de densidad, vamos a evaluar los momentos más importantes del tensor de radiación y a darles un significado físico.

- La intensidad media del campo de radiación, la cual se define como

$$J_0^0(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{\nu}(\tau, \mu) d\mu \quad (5.4)$$

- La orientación del campo de radiación,

$$J_0^1(\tau) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 \mu V_{\nu}(\tau, \mu) d\mu \quad (5.5)$$

Como vemos, solo hay orientación cuando el campo de radiación está polarizado circularmente.

- La anisotropía de la radiación,

$$J_0^2(\tau) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_{-1}^1 (3\mu^2 - 1) I_{\nu}(\tau, \mu) d\mu \quad (5.6)$$

la cual vale 0 si estamos en el caso de un campo de radiación isótropo.

5.2 Ecuaciones de Equilibrio Estadístico

Las EEE determinan la evolución de las poblaciones de una especie atómica que no se encuentra en ET. La descripción de las EEE es dependiente de un sistema de referencia y, en nuestro caso tenemos dos direcciones que son preferentes: el eje de simetría del campo de radiación y la dirección a la que apunta el campo magnético. Usar una u otra tiene sus ventajas y sus inconvenientes.

Asumiendo que la radiación está despolarizada y que tiene simetría axial a lo largo de una dirección, si usamos un sistema de referencia alineado con el eje de simetría, el campo de radiación quedará completamente determinado por dos multipolos: la intensidad media, J_0^0 , y la anisotropía, J_0^2 . Esto nos llevará a expresiones de los ritmos de transferencia y relajación relativamente sencillas. Además, en el estacionario, los únicos tensores no nulos serán los de rango, K , par. La desventaja de utilizar este sistema de referencia es que necesitaremos considerar un *kernel* magnético, $\mathcal{K}_{QQ'}^K$, que mezcla los diferentes tensores del mismo rango, y el cual viene dado por

$$\mathcal{K}_{QQ'}^K = \sum_{Q''} \mathcal{D}_{Q''Q}^K(R)^* Q'' \mathcal{D}_{Q''Q'}^K(R) \quad (5.7)$$

donde $\mathcal{D}_{Q''Q}^K(R)$ y $\mathcal{D}_{Q''Q'}^K(R)$ son los elementos de matriz del operador de rotación $D(R)$ que conecta los estados Q'' con Q y Q' , respectivamente, y se definen como:

$$\mathcal{D}_{Q''Q}^K(R) = \langle KQ'' | D(R) | KQ \rangle ; \mathcal{D}_{Q''Q'}^K(R) = \langle KQ'' | D(R) | KQ' \rangle, \quad (5.8)$$

siendo R la rotación que lleva el sistema de referencia alineado con el campo magnético al sistema del campo de radiación. Hemos hecho uso de * para indicar que es el complejo conjugado. Atendiendo a los sistemas de referencia de la figura 5.1, para llevar el sistema del campo magnético al del campo de radiación debemos abatir los ángulos en sentido opuesto a la orientación que tiene respecto a este. Expresando dicha rotación en términos de ángulos de Euler, tendremos

$$D(R) \equiv D(-\gamma, -\theta, -\chi). \quad (5.9)$$

De esta forma, la rotación se lleva a cabo en el siguiente orden: primero abatimos el ángulo γ , de forma que el eje X yacza en el plano xy del sistema del campo de radiación; después rotamos un ángulo θ que alinea la dirección del campo magnético con el campo de radiación; y, por último, rotamos χ en el plano xy para orientar los planos y hacer coincidir los ejes X y Y con los del campo de radiación.

Por otro lado, si utilizamos un sistema de referencia solidario con el campo

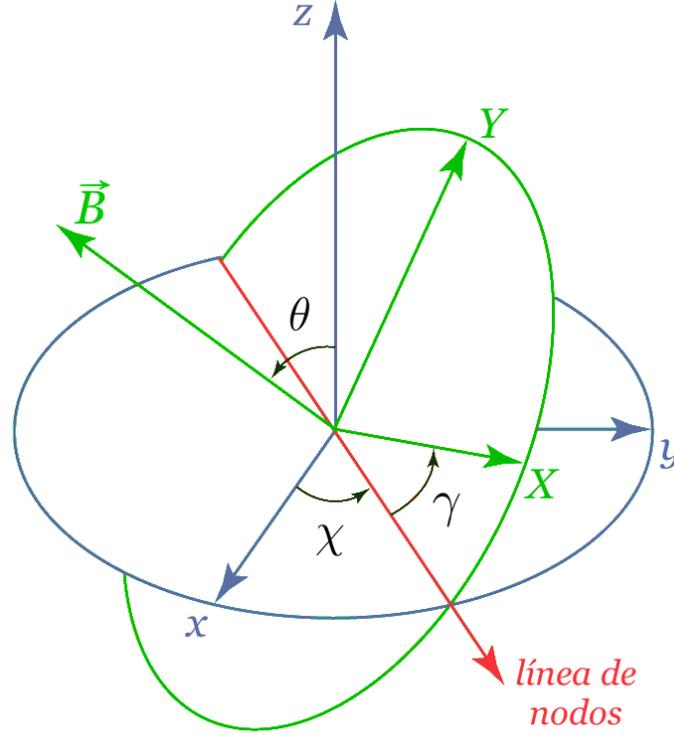


Figura 5.1: Sistemas de referencia del campo de radiación (azul) y del campo magnético (verde). Los ángulos de Euler (χ, θ, γ) determinan la orientación de sistema de referencia del campo magnético respecto al campo de radiación. En rojo se ha representado la línea de nodos que es la intersección entre los planos xy de ambos sistemas de referencia.

magnético, evitamos tener que usar ese *kernel*, ya que solo contribuiría a los elementos diagonales, pero las expresiones de las tasas de transferencia y relajación serían mucho más complejas por la pérdida de la simetría del campo de radiación.

Siguiendo a [Landi Degl'Innocenti & Landolfi \(2004\)](#), usaremos el sistema alineado con el campo de radiación y, por tanto, haremos uso del kernel magnético y las rotaciones descritas previamente (ecs. 5.7, 5.8). Para este caso, dada una transición atómica, las EEE que describen las poblaciones de

los niveles involucrados en ella vendrán dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_Q^K(u) = & -2\pi i\nu_L g_u \sum_{Q'} \mathcal{K}_{QQ'}^K \rho_{Q'}^K(u) + \sum_{K'Q'} \mathbb{T}_A(uKQ, lK'Q') \rho_{Q'}^{K'}(l) \\
& - \sum_{K'Q'} [\mathbb{R}_E(uK'QK'Q') + \mathbb{R}_S(uK'QK'Q')] \rho_{Q'}^{K'}(u) \\
& + \sqrt{\frac{2J_l + 1}{2J_u + 1}} C_I^{(K)}(u, l) \rho_Q^K(l) - [C_S^{(0)}(l, u) + D^{(K)}(u)] \rho_Q^K(u) \quad (5.10)
\end{aligned}$$

para el nivel superior y

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_Q^K(l) = & -2\pi i\nu_L g_l \sum_{Q'} \mathcal{K}_{QQ'}^K \rho_{Q'}^K(l) \\
& + \sum_{K'Q'} [\mathbb{T}_E(lKQ, uK'Q') + \mathbb{T}_S(lKQ, uK'Q')] \rho_{Q'}^{K'}(u) \\
& - \sum_{K'Q'} \mathbb{R}_A(lKQK'Q') \rho_{Q'}^{K'}(l) \\
& + \sqrt{\frac{2J_u + 1}{2J_l + 1}} C_S^{(K)}(l, u) \rho_Q^K(u) - [C_I^{(0)}(u, l) + D^{(K)}(l)] \rho_Q^K(l) \quad (5.11)
\end{aligned}$$

para el nivel inferior, donde:

- $-2\pi i\nu_L g \sum_{Q'} \mathcal{K}_{QQ'}^K \rho_{Q'}^K$ representa la tasa a la cual la coherencia entre los niveles magnéticos desaparece debido al desdoblamiento de los mismos por la presencia de un campo magnético. Esto es lo que se conoce como despolarización Hanle.
- \mathbb{T} son las tasas de transferencia. $\mathbb{T}_A(uKQ, lK'Q')$ representa la probabilidad de que ocurra una transición por absorción del nivel inferior ($lK'Q'$) al superior (uKQ); $\mathbb{T}_{E, S}(lKQ, uK'Q')$, representan la probabilidad de que ocurra una transición por emisión espontánea (E) o estimulada (S) del nivel inferior ($uK'Q'$) al nivel (lKQ)
- \mathbb{R} son las tasas de relajación. $\mathbb{R}_A(lKQK'Q')$ representa la probabilidad de que ocurra una relajación por absorción del nivel inferior ($lK'Q'$) a otro (lKQ); $\mathbb{R}_{E, S}(uK'QK'Q')$, representan la probabilidad de que ocurra una relajación por emisión espontánea (E) o estimulada (S) del nivel superior ($uK'Q'$) a otro nivel (uKQ)
- $C_S^{(0)}(u, l)$ y $C_I^{(0)}(u, l)$ son las tasas de colisión. Representan la probabilidad de que ocurra una transición colisional superelástica (S) del nivel

superior al inferior, o una transición colisional inelástica (I) del inferior al superior, respectivamente

- $D^{(K)}(u)$ y $D^{(K)}(l)$ son las tasas de despolarización debidas a colisiones elásticas en los niveles superior e inferior, respectivamente

Todos los ritmos, como tal, tienen dimensiones de tiempo a la menos 1 ($[\mathbf{T}]^{-1}$) y, en el SI, su unidad es s^{-1} .

5.2.1 Resolución de las Ecuaciones de Equilibrio Estadístico

Para resolver las EEE vamos a tener en cuenta una serie de aproximaciones y consideraciones: despreciamos las colisiones inelásticas y superelásticas y las despolarizaciones; las tasas² de transferencia y relajación por emisión espontánea son proporcionales a deltas del Kronecker, $\delta_{KK'}$ y $\delta_{QQ'}$, de forma que quedarán determinadas por

$$\mathbb{T}_E(lKQ, uKQ) = (2J_u + 1)A_{ul}(-1)^{1+J_l+J_u+K} \begin{Bmatrix} J_u & J_u & K \\ J_l & J_l & 1 \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\mathbb{R}_E(uKQKQ) = A_{ul} \quad (5.13)$$

siendo A_{ul} el coeficiente de Einstein de emisión espontánea de la transición (s^{-1}). De forma análoga, las tasas de absorción y emisión estimulada, pasan a sumar solo sobre los K' pares, ya que los Q' están forzados a tomar el valor de Q por la dependencia de estos términos con J_Q^K . Bajo estas consideraciones, las EEE que vamos a resolver nos quedan como sigue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_Q^K(u) = & -2\pi i\nu_L g_u \sum_{Q'} \mathcal{K}_{QQ'}^K \rho_{Q'}^K(u) + \sum_{K'par} \mathbb{T}_A(uKQ, lK'Q) \rho_Q^{K'}(l) \\ & - A_{ul} \rho_Q^K(u) + \sum_{K'par} \mathbb{R}_S(uKQK'Q) \rho_Q^{K'}(u) = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

²Las expresiones generales de las tasas de transferencia y relajación pueden encontrarse en la sección 7.2 de [Landi Degl'Innocenti & Landolfi \(2004\)](#), pág 284.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_Q^K(l) &= -2\pi i\nu_L g_l \sum_{Q'} \mathcal{K}_{QQ'}^K \rho_{Q'}^K(l) \\
&+ (2J_u + 1)A_{ul}(-1)^{1+J_l+J_u+K} \begin{Bmatrix} J_u & J_u & K \\ J_l & J_l & 1 \end{Bmatrix} \rho_Q^K(u) \\
&+ \sum_{K'par} \left[\mathbb{T}_S(lKQ, uK'Q) \rho_Q^{K'}(u) - \mathbb{R}_A(lKQK'Q) \rho_Q^{K'}(l) \right] = 0 \quad (5.15)
\end{aligned}$$

donde, como vamos a resolverlas para el caso estacionario, hemos indicado que las sumas se realizan únicamente para los valores de K pares.

La expresión para la tasa de transferencia debida a absorciones queda

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_A(uKQ, lK'Q) &= (2J_l + 1)B_{lu} \left[\delta_{KK'}(-1)^{1+J_l+J_u} \begin{Bmatrix} J_u & J_u & K \\ J_l & J_l & 1 \end{Bmatrix} J_0^0 \right. \\
&\quad \left. + (-1)^Q W_{TA} J_0^2 \right] \quad (5.16)
\end{aligned}$$

donde, B_{lu} es el coeficiente de Einstein de absorción para la transición dado por

$$B_{lu} = \frac{g_u}{g_l} \frac{\lambda^5}{2hc^2} A_{ul} \quad (5.17)$$

con unidades de $\text{W}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-1}$ en el SI. En el segundo término del corchete, hemos agrupado todos los factores independientes de la radiación en W_{TA} para que la expresión sea más manejable, siendo

$$W_{TA} = \sqrt{15(2K+1)(2K'+1)} \begin{Bmatrix} J_u & J_l & 1 \\ J_u & J_l & 1 \\ K & K' & 2 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} K & K' & 2 \\ -Q & Q & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

La tasa de transferencia debida a emisiones estimuladas es

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_S(lKQ, uK'Q) &= (2J_u + 1)B_{ul} \left[\delta_{KK'}(-1)^{1+J_l+J_u} \begin{Bmatrix} J_l & J_l & K \\ J_u & J_u & 1 \end{Bmatrix} J_0^0 \right. \\
&\quad \left. + (-1)^Q W_{TS} J_0^2 \right], \quad (5.19)
\end{aligned}$$

siendo B_{ul} el coeficiente de Einstein de emisión estimulada de la transición, que tiene las mismas unidades que B_{lu} , ya que están relacionados por la siguiente igualdad

$$g_u B_{ul} = g_l B_{lu} \quad (5.20)$$

Igual que en el caso de la emisión espontánea, en el segundo término del

corchete hemos agrupado los factores que no dependen del tensor de radiación:

$$W_{TS} = \sqrt{15(2K+1)(2K'+1)} \begin{Bmatrix} J_l & J_u & 1 \\ J_l & J_u & 1 \\ K & K' & 2 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} K & K' & 2 \\ -Q & Q & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

De la misma forma, las tasas de relajación debidas a absorciones y emisiones estimuladas quedan expresadas como

$$\mathbb{R}_A(lKQ, K'Q) = B_{lu} [\delta_{KK'} J_0^0 + (-1)^{1-J_l+J_u+Q} W_{RA} J_0^2] \quad (5.22)$$

$$\mathbb{R}_S(uKQ, K'Q) = B_{ul} [\delta_{KK'} J_0^0 + (-1)^{1+J_l-J_u+Q} W_{RS} J_0^2] \quad (5.23)$$

siendo

$$W_{RA} = (2J_l + 1) \sqrt{15(2K+1)(2K'+1)} \\ \times \begin{Bmatrix} K & K' & 2 \\ J_l & J_l & J_l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ J_u & J_l & J_u \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} K & K' & 2 \\ Q & -Q & 0 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

y

$$W_{RS} = (2J_u + 1) \sqrt{15(2K+1)(2K'+1)} \\ \times \begin{Bmatrix} K & K' & 2 \\ J_u & J_u & J_u \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ J_u & J_u & J_l \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} K & K' & 2 \\ Q & -Q & 0 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Como ya adelantábamos al comienzo de este capítulo, al resolver las EEE en el estacionario, obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, cuyas incógnitas serán los multipolos de la matriz de densidad.

Antes de comenzar con la resolución de las ecuaciones, es conveniente que presentemos algunas magnitudes que nos ayudarán a que las expresiones sean más manejables. Se define el número medio de fotones en la unidad de ángulo sólido, \bar{n} , como

$$\bar{n} = \frac{(2J_l + 1)B_{lu}}{(2J_u + 1)A_{ul}} J_0^0 \quad (5.26)$$

Otra magnitud que nos ayudará a simplificar las ecuaciones será el factor de anisotropía, ω , que se define, a partir de los momentos del tensor de radiación:

$$\omega = \sqrt{2} \frac{J_0^2}{J_0^0} \quad (5.27)$$

Este factor de anisotropía toma valores comprendidos entre $-1/2 \leq \omega \leq 1$, donde los positivos se corresponden con campos de radiación verticales y

los negativos con campos radiales. Los valores críticos de esta magnitud se representan los siguientes casos:

- si $\omega = -1/2$ estaríamos ante un campo de radiación radial
- si $\omega = 0$ tenemos un campo de radiación isótropo
- si $\omega = 1$ tenemos un haz unidireccional de radiación vertical

Por último, definimos la eficiencia Hanle del nivel superior, H_u , y del nivel inferior, H_l , como

$$H_u = \frac{2\pi\nu_L g_u}{A_{ul}} = \frac{0.879 \times 10^7 B g_u}{A_{ul}}, \quad H_l = \frac{2\pi\nu_L g_l}{B_{lu} J_0^0} = \frac{0.879 \times 10^7 B g_l}{B_{lu} J_0^0} \quad (5.28)$$

donde B es la intensidad de campo magnético y $2\pi\nu_L = 0.879 \times 10^7 B$ con B en Gauss (Landi Degl'Innocenti & Landolfi, 2004)

Tomamos las EEE (ecs. 5.14, 5.15) y las dividimos por el factor $-2\pi i \nu_L g_u$ para el nivel superior, y por $-2\pi i \nu_L g_l$ la del inferior, y haciendo uso de las definiciones previas, llegamos a las siguientes expresiones:

$$iH_u \sum_{Q'} \mathcal{K}_{QQ'}^K \rho_{Q'}^K(u) + \rho_Q^K(u) - \sum_{K'par} \mathbb{T}_A(uKQ, lK'Q) \rho_Q^{K'}(l) + \sum_{K'par} \mathbb{R}_S(uKQ, K'Q) \rho_Q^{K'}(u) = 0 \quad (5.29)$$

$$iH_l \bar{n} \sum_{Q'} \mathcal{K}_{QQ'}^K \rho_{Q'}^K(l) - (2J_l + 1)(-1)^{1+J_l+J_u} \begin{Bmatrix} J_u & J_u & K \\ J_l & J_l & 1 \end{Bmatrix} \rho_Q^K(u) + \sum_{K'par} \mathbb{R}_A(lKQ, uK'Q) \rho_Q^{K'}(l) - \sum_{K'par} \mathbb{T}_S(lKQ, uK'Q) \rho_Q^{K'}(u) = 0 \quad (5.30)$$

donde la división por cada uno de los factores la hemos aplicado a las expresiones de las tasas de transferencia y relajación, quedando estas de la siguiente manera:

$$\mathbb{T}_A(uKQ, lK'Q) = (2J_u + 1) \left[\delta_{KK'} (-1)^{1+J_l+J_u} \begin{Bmatrix} J_u & J_u & K \\ J_l & J_l & 1 \end{Bmatrix} + (-1)^Q \frac{\omega}{\sqrt{2}} W_{TA} \right] \bar{n} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_S(lKQ, uK'Q) = (2J_u + 1) \frac{g_l}{g_u} \left[\delta_{KK'} (-1)^{1+J_l+J_u} \begin{Bmatrix} J_l & J_l & K \\ J_u & J_u & 1 \end{Bmatrix} \right. \\ \left. + (-1)^Q \frac{\omega}{\sqrt{2}} W_{TS} \right] \bar{n} \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\mathbb{R}_A(lKQ, K'Q) = \left[\delta_{KK'} + (-1)^{1-J_l+J_u+Q} \frac{\omega}{\sqrt{2}} W_{RA} \right] \bar{n} \quad (5.33)$$

$$\mathbb{R}_S(uKQ, K'Q) = \frac{2J_u + 1}{2J_l + 1} \frac{g_l}{g_u} \left[\delta_{KK'} + (-1)^{1+J_l-J_u+Q} \frac{\omega}{\sqrt{2}} W_{RS} \right] \bar{n} \quad (5.34)$$

Para resolver las ecuaciones 5.29 y 5.30 debemos tener en cuenta ciertas consideraciones. El sistema algebraico que formamos a partir de ellas estará constituido por N_{eq} ecuaciones, siendo

$$N_{eq} = (J_l + 1)(2J_l + 1) + (J_u + 1)(2J_u + 1) \quad (5.35)$$

de forma que nuestro sistema acoplado tendrá un total de 12 ecuaciones: 6 para el nivel superior y 6 para el nivel inferior. Además, debemos sustituir una de ellas por la ecuación de conservación:

$$\sum_{K,Q} [\rho_Q^K(u) + \rho_Q^K(l)] = 1 \quad (5.36)$$

En nuestro caso, consideramos que la ecuación a sustituir es la correspondiente a $K = 0$ del nivel inferior, ya que es la que nos aporta menor información.

Como todo sistema de ecuaciones lineales, podemos expresar el formado por las EEE como un producto de matrices de la siguiente forma

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\rho} = \mathbf{b} \quad (5.37)$$

siendo \mathbf{C} la matriz de coeficientes, $\boldsymbol{\rho}$ el vector de multipolos que contiene los ρ_Q^K de ambos niveles, y \mathbf{b} el vector de soluciones que está lleno de ceros, excepto en la posición correspondiente a la ecuación de conservación que lleva un 1.

Al tener el sistema expresado de esta forma, basta con diagonalizar la matriz de coeficientes para obtener las soluciones, por tanto, vamos a extraer los coeficientes de las EEE y a situarlos en la matriz. Para ello, el vector de multipolos vamos a considerar que está distribuido de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\rho} = (\rho_0^0(u), \rho_Q^2(u) | \rho_0^0(l), \rho_Q^2(l))^T \quad (5.38)$$

es decir, primero situamos los multipolos del nivel superior, ordenados de menor a mayor, primero según su rango, K , y después, según su Q . Seguido,

Tabla 5.2: Componentes no nulas de la matriz de coeficientes, \mathbf{C} , para el sistema algebraico resultante de las ecuaciones 5.29 y 5.30. Se muestran las seis primeras filas de la matriz, que corresponden a las ecuaciones para las poblaciones del nivel superior: $\rho_Q^K(u)$. En los argumentos de las tasas de transferencia y relajación solo hemos especificado los valores de K' , entendiéndose que los de K y Q vienen determinados por la fila (e indicados en las cabeceras).

Fila 1 ($K = 0, Q = 0$)
$C_{1,1} = iH_u\mathcal{K}_{00}^0 + \mathbb{R}_S(K' = 0) + 1$, $C_{1,4} = \mathbb{R}_S(K' = 2)$, $C_{1,7} = -\mathbb{T}_A(K' = 0)$ $C_{1,10} = -\mathbb{T}_A(K' = 2)$
Fila 2 ($K = 2, Q = -2$)
$C_{2,2} = iH_u\mathcal{K}_{2-2}^2 + \mathbb{R}_S(K' = 2) + 1$, $C_{2,3} = iH_u\mathcal{K}_{2-1}^2$, $C_{2,4} = iH_u\mathcal{K}_{-2}^2$ $C_{2,5} = iH_u\mathcal{K}_{-21}^2$, $C_{2,6} = iH_u\mathcal{K}_{-22}^2$, $C_{2,8} = -\mathbb{T}_A(K' = 2)$
Fila 3 ($K = 2, Q = -1$)
$C_{3,2} = iH_u\mathcal{K}_{-1-2}^2$, $C_{3,3} = iH_u\mathcal{K}_{-1-1}^2 + \mathbb{R}_S(K' = 2) + 1$, $C_{3,4} = iH_u\mathcal{K}_{-10}^2$ $C_{3,5} = iH_u\mathcal{K}_{-11}^2$, $C_{3,6} = iH_u\mathcal{K}_{-12}^2$, $C_{3,9} = -\mathbb{T}_A(K' = 2)$
Fila 4 ($K = 2, Q = 0$)
$C_{4,1} = \mathbb{R}_S(K' = 0)$, $C_{4,2} = iH_u\mathcal{K}_{0-2}^2$, $C_{4,3} = iH_u\mathcal{K}_{0-1}^2$ $C_{4,4} = iH_u\mathcal{K}_{00}^2 + \mathbb{R}_S(K' = 2) + 1$, $C_{4,5} = iH_u\mathcal{K}_{01}^2$, $C_{4,6} = iH_u\mathcal{K}_{02}^2$ $C_{4,7} = -\mathbb{T}_A(K' = 0)$, $C_{4,10} = -\mathbb{T}_A(K' = 2)$
Fila 5 ($K = 2, Q = 1$)
$C_{5,2} = iH_u\mathcal{K}_{1-2}^2$, $C_{5,3} = iH_u\mathcal{K}_{1-1}^2$, $C_{5,4} = iH_u\mathcal{K}_{10}^2$ $C_{5,5} = iH_u\mathcal{K}_{11}^2 + \mathbb{R}_S(K' = 2) + 1$, $C_{5,6} = iH_u\mathcal{K}_{12}^2$, $C_{5,11} = -\mathbb{T}_A(K' = 2)$
Fila 6 ($K = 2, Q = 2$)
$C_{6,2} = iH_u\mathcal{K}_{2-2}^2$, $C_{6,3} = iH_u\mathcal{K}_{2-1}^2$, $C_{6,4} = iH_u\mathcal{K}_{20}^2$ $C_{6,5} = iH_u\mathcal{K}_{21}^2$, $C_{6,6} = iH_u\mathcal{K}_{22}^2 + \mathbb{R}_S(K' = 2) + 1$, $C_{6,12} = -\mathbb{T}_A(K' = 2)$

Tabla 5.3: Componentes no nulas de la matriz de coeficientes, \mathbf{C} , para el sistema algebraico resultante de las ecuaciones 5.29 y 5.30. Se muestran las seis últimas filas de la matriz, que corresponden a las ecuaciones para las poblaciones del nivel inferior: $\rho_Q^K(l)$. En los argumentos de las tasas de transferencia y relajación solo hemos especificado los valores de K' , entendiéndose que los de K y Q vienen determinados por la fila (e indicados en las cabeceras).

Fila 7 ($K = 0, Q = 0$)
$C_{7,1} = P - \mathbb{T}_S(K' = 0)$, $C_{7,4} = -\mathbb{T}_S(K' = 2)$, $C_{7,7} = iH_l\mathcal{K}_{00}^0 + \mathbb{R}_A(K' = 0)$ $C_{7,10} = \mathbb{R}_A(K' = 2)$
Fila 8 ($K = 2, Q = -2$)
$C_{8,2} = P - \mathbb{T}_S(K' = 2)$, $C_{8,8} = iH_l\mathcal{K}_{-2-2}^2\bar{n} + \mathbb{R}_A(K' = 2)$, $C_{8,9} = iH_l\mathcal{K}_{-2-1}^2\bar{n}$ $C_{8,10} = iH_l\mathcal{K}_{-20}^2\bar{n}$, $C_{8,11} = iH_l\mathcal{K}_{-21}^2\bar{n}$, $C_{8,12} = iH_l\mathcal{K}_{-22}^2\bar{n}$
Fila 9 ($K = 2, Q = -1$)
$C_{9,3} = P - \mathbb{T}_S(K' = 2)$, $C_{9,8} = iH_l\mathcal{K}_{-1-2}^2\bar{n}$, $C_{9,9} = iH_l\mathcal{K}_{-1-1}^2\bar{n} + \mathbb{R}_A(K' = 2)$ $C_{9,10} = iH_l\mathcal{K}_{-10}^2\bar{n}$, $C_{9,11} = iH_l\mathcal{K}_{-11}^2\bar{n}$, $C_{9,12} = iH_l\mathcal{K}_{-12}^2\bar{n}$
Fila 10 ($K = 2, Q = 0$)
$C_{10,1} = -\mathbb{T}_S(K' = 0)$, $C_{10,4} = P - \mathbb{T}_S(K' = 2)$, $C_{10,7} = \mathbb{R}_A(K' = 0)$ $C_{10,8} = iH_l\mathcal{K}_{0-2}^2\bar{n}$, $C_{10,9} = iH_l\mathcal{K}_{0-1}^2\bar{n}$, $C_{10,10} = iH_l\mathcal{K}_{00}^2\bar{n} + \mathbb{R}_A(K' = 2)$ $C_{10,11} = iH_l\mathcal{K}_{01}^2\bar{n}$, $C_{10,12} = iH_l\mathcal{K}_{02}^2\bar{n}$
Fila 11 ($K = 2, Q = 1$)
$C_{11,5} = P - \mathbb{T}_S(K' = 2)$, $C_{11,8} = iH_l\mathcal{K}_{1-2}^2\bar{n}$, $C_{11,9} = iH_l\mathcal{K}_{1-1}^2\bar{n}$ $C_{11,10} = iH_l\mathcal{K}_{10}^2\bar{n}$, $C_{11,11} = iH_l\mathcal{K}_{11}^2\bar{n} + \mathbb{R}_A(K' = 2)$, $C_{11,12} = iH_l\mathcal{K}_{12}^2\bar{n}$
Fila 12 ($K = 2, Q = 2$)
$C_{12,6} = P - \mathbb{T}_S(K' = 2)$, $C_{12,8} = iH_l\mathcal{K}_{2-2}^2\bar{n}$, $C_{12,9} = iH_l\mathcal{K}_{2-1}^2\bar{n}$ $C_{12,10} = iH_l\mathcal{K}_{20}^2\bar{n}$, $C_{12,11} = iH_l\mathcal{K}_{21}^2\bar{n}$, $C_{12,12} = iH_l\mathcal{K}_{22}^2\bar{n} + \mathbb{R}_A(K' = 2)$
donde $P = -(2J_l + 1)(-1)^{1+J_l+J_u} \begin{Bmatrix} J_u & J_u & K \\ J_l & J_l & 1 \end{Bmatrix}$

situamos los multipolos del nivel inferior con el mismo criterio. Los elementos no nulos de la matriz de coeficientes hasta $K = 2$ se encuentran en las tablas 5.2 y 5.3, donde aún no hemos sustituido la ecuación de conservación (ec. 5.36). Para aplicarla de la forma que hemos indicado, basta con sustituir todos los elementos de la fila 7 por el valor 1, es decir:

$$C_{7j} = 1 \quad (5.39)$$

donde j indica las posiciones de las columnas.

5.3 Cálculo del factor de anisotropía

Previamente, hemos definido el factor de anisotropía, ω , como una de las magnitudes que nos ha ayudado a simplificar las expresiones de las EEE. Además, hemos especificado sus valores límites y lo que representan.

Siguiendo a Landi Degl'Innocenti & Landolfi (2004), encontramos una expresión analítica explícita que parte de la definición (ec. 5.27) y, usando los momentos de la intensidad, expresa en función de integrales exponenciales³, dada por

$$\omega(\tau) = \frac{\int_0^\infty [3E_3(|t - \tau|) - E_1(|t - \tau|)]S(t)dt}{2 \int_0^\infty E_1(|t - \tau|)S(t)dt} \quad (5.41)$$

Para el caso de una atmósfera ME, podemos obtener una expresión específica, la cual depende de los parámetros de la función fuente y de las integrales mencionadas. No ocurre lo mismo en el caso de una atmósfera mME, ya que al integrar las exponenciales de la función fuente con las $E_n(x)$, obtenemos una divergencia en $\tau = 0$ y por tanto no podemos evaluarla en ese punto⁴. Por tanto, para calcular este parámetro haciendo uso de nuestro modelo hemos recurrido a los métodos numéricos y hemos aplicado la cuadratura de Gauss-Legendre, según la cual podemos discretizar una integral de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_i^N f(x_i)w_i \quad (5.42)$$

³Una integral exponencial de orden n se define como

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xy}}{y^n} dy = \int_0^1 e^{-\frac{x}{\mu}} \mu^{n-2} d\mu \quad (5.40)$$

donde se ha realizado el cambio de variable $y = \mu^{-1}$

⁴Para más detalle, consultar el Apéndice A de este documento.

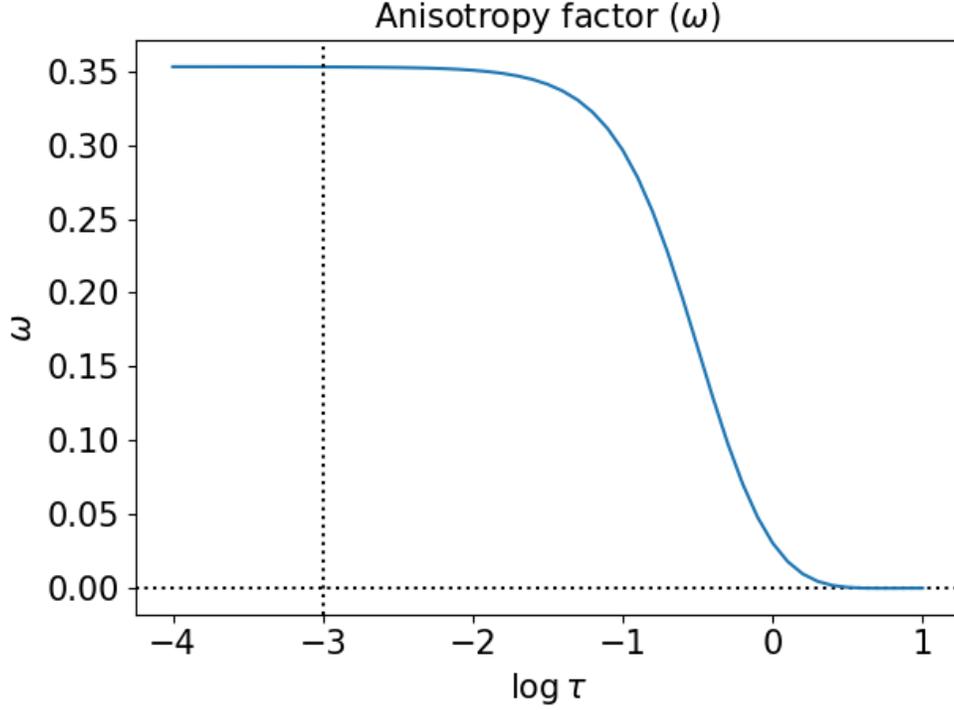


Figura 5.2: Factor de anisotropía ω para la línea de Mg I b2, haciendo uso de los parámetros obtenidos por el ajuste mME que mostramos en la tabla Table 3.1. La línea de puntos en $\log \tau = -3$ marca la altura de formación de la línea de Mg I b2 que estimamos a partir del campo magnético.

donde N es el número de nodos de la cuadratura en el intervalo $[a, b]$, x_i es la posición del i -ésimo nodo y w_i su peso.

Partiendo de la definición de factor de anisotropía que hemos dado en la ecuación 5.27, aplicamos la cuadratura al cálculo de J_0^0 y J_0^2 (ecs. 5.4 y 5.6) de la siguiente forma:

$$J_0^0(\tau) \approx \frac{1}{2} \sum_i^N I_\nu(\tau, x_i) w_i \quad (5.43)$$

$$J_0^2(\tau) \approx \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_i^N (3x_i^2 - 1) I_\nu(\tau, x_i) w_i, \quad (5.44)$$

donde $I_\nu(\tau, \mu)$ es la intensidad específica a una profundidad óptica dada (ec. 2.12). Aquí, como estamos integrando desde $\mu = -1$ hasta $\mu = 1$, debemos separar la integral en la que da la radiación que se propaga hacia afuera ($\mu > 0$)

y la que describe la que va hacia adentro ($\mu < 0$). Tendremos de esa forma

$$I_\nu(\tau, \mu) = \int_\tau^\infty S_\nu(\tau') e^{-\frac{t-\tau}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \quad (5.45)$$

para la radiación hacia afuera ($\mu > 0$), y

$$I_\nu(\tau, \mu) = \int_0^\tau S_\nu(t) e^{-\frac{\tau-t}{|\mu|}} \frac{dt}{|\mu|} \quad (5.46)$$

para la que viaja hacia adentro ($\mu < 0$), donde $S_\nu(\tau)$ es la función fuente, la cual depende de la profundidad óptica. Resolviendo las integrales con la función fuente mME (ec. 3.28) llegamos a

$$I_\nu(\tau, \mu) = S_0 + S_1(\tau + \mu) + \frac{A_1}{1 + \alpha_1\mu} e^{-\alpha_1\tau} - \frac{A_2}{1 + \alpha_2\mu} e^{-\alpha_2\tau} \quad (5.47)$$

para la radiación que viaja hacia afuera, y

$$I_\nu(\tau, \mu) = S_0(1 - e^{-\tau/|\mu|}) + S_1\tau - S_1|\mu|(1 - e^{-\tau/|\mu|}) + \frac{A_1}{1 - \alpha_1|\mu|}(e^{-\alpha_1\tau} - e^{-\tau/|\mu|}) - \frac{A_2}{1 - \alpha_2|\mu|}(e^{-\alpha_2\tau} - e^{-\tau/|\mu|}) \quad (5.48)$$

para la radiación que viaja hacia adentro. Estas serán las expresiones que usaremos para calcular el factor de anisotropía.

Haciendo uso de los parámetros obtenidos para según el ajuste mME de Mg I b2 presentado en la Tabla 3.1, hemos calculado el factor de anisotropía para la atmósfera de ese caso. Hemos representado la estratificación del factor de anisotropía obtenida en la figura 5.2, donde podemos ver que, para nuestra atmósfera, toma valores entre $\omega = 0$, en el fondo, y $\omega = 0.35$, en la parte más alta, por tanto podemos decir que en nuestro modelo, la radiación es esencialmente vertical.

Capítulo 6

Polarización por scattering en el Mg I b2¹

En el capítulo anterior hemos visto cómo resolviendo las EEE mediante un sistema de ecuaciones, podemos conocer los multipolos de la matriz de densidad de dos niveles que intervienen en una transición, los cuales son una representación de las poblaciones de dichos niveles y de sus estados de polarización. Una vez conocemos las poblaciones, podemos hallar las señales de polarización por scattering de la radiación que interacciona con dichos niveles. Esto se debe a que el átomo, al reemitir la radiación, no lo hace de forma isotrópica, ya que sus niveles están descompensados.

En este capítulo abordaremos cómo obtener señales de polarización por *scattering* a partir de los multipolos de la matriz de densidad y estudiaremos la influencia de algunos de los términos de las EEE sobre estas señales. Lo haremos asumiendo una atmósfera mME para el caso del Mg I b2 y usando los resultados obtenidos a partir del modelo *Bifrost*. A partir de los datos de la transición y de los parámetros de la función fuente mME obtenidos en los ajustes previos, calcularemos los multipolos J_0^0 y J_0^2 del tensor de radiación y el factor de anisotropía ω y el promedio de fotones en la unidad de ángulo sólido \bar{n} ; resolveremos las EEE obteniendo los multipolos de la matriz de densidad y calcularemos con ellos las señales de polarización lineal.

¹En esta sección escribiremos "Q" cuando hagamos referencia al índice de los tensores irreducibles e indicaremos específicamente "Stokes Q" cada vez que hablemos de polarización.

6.1 Polarización lineal fraccional

Para obtener las señales de polarización por *scattering* vamos a hacer uso de una magnitud denominada polarización fraccional, la cual viene dada por

$$\tilde{p}_i = \frac{\tilde{\varepsilon}_i}{\tilde{\varepsilon}_I} \quad (6.1)$$

donde $\tilde{\varepsilon}_i$ es la emisividad de Stokes I, Q, U , y V debido a procesos de *scattering*. Esta emisividad vendrá determinada por los multipolos de la matriz de densidad, ρ_Q^K , y de las componentes del tensor geométrico, $\mathcal{T}_Q^K(i, \boldsymbol{\Omega})$ – mencionado cuando definimos los multipolos del tensor de radiación en ec. 5.3 – de la siguiente forma

$$\tilde{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\Omega}) = \frac{h\nu}{4\pi} \mathcal{N} \sqrt{2J_u + 1} A_{ul} \sum_{K,Q} w_{ul}^{(K)} \mathcal{T}_Q^K(i, \boldsymbol{\Omega}) \rho_Q^K(u) \quad (6.2)$$

donde $i = 0, 1, 2, 3$ corresponde a Stokes I, Q, U , y V , respectivamente; y el símbolo $w_{ul}^{(K)}$ viene dado por la expresión

$$w_{ul}^{(K)} = (-1)^{1+J_l+J_u} \sqrt{3(2J_u + 1)} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & K \\ J_u & J_u & J_l \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

Vamos a obtener una expresión más explícita, en función del tensor geométrico y los multipolos de la matriz de densidad. Sustituyendo la definición de emisividad dada en 6.2 en la de polarización fraccional (ec. 6.1) obtenemos

$$\tilde{p}_i = \frac{\sum_{K,Q} w_{ul}^{(K)} \mathcal{T}_Q^K(i, \boldsymbol{\Omega}) \rho_Q^K(u)}{\sum_{K,Q} w_{ul}^{(K)} \mathcal{T}_Q^K(0, \boldsymbol{\Omega}) \rho_Q^K(u)} = \frac{w_{ul}^{(0)} \mathcal{T}_0^0(i, \boldsymbol{\Omega}) \rho_0^0(u) + \sum_Q w_{ul}^{(2)} \mathcal{T}_Q^2(i, \boldsymbol{\Omega}) \rho_Q^2(u)}{w_{ul}^{(0)} \mathcal{T}_0^0(0, \boldsymbol{\Omega}) \rho_0^0(u) + \sum_Q w_{ul}^{(2)} \mathcal{T}_Q^2(0, \boldsymbol{\Omega}) \rho_Q^2(u)}$$

donde en la segunda igualdad hemos separado los sumatorios en los de $K = 0$ y $K = 2$ que, como vimos en el capítulo anterior son los que dan elementos no nulos de la matriz de densidad. Extrayendo $\rho_0^0(u)$ como factor común en el numerador y el denominador nos queda

$$\tilde{p}_i = \frac{w_{ul}^{(0)} \mathcal{T}_0^0(i, \boldsymbol{\Omega}) + \sum_Q w_{ul}^{(2)} \mathcal{T}_Q^2(i, \boldsymbol{\Omega}) \sigma_Q^2(u)}{w_{ul}^{(0)} \mathcal{T}_0^0(0, \boldsymbol{\Omega}) + \sum_Q w_{ul}^{(2)} \mathcal{T}_Q^2(0, \boldsymbol{\Omega}) \sigma_Q^2(u)} \quad (6.4)$$

donde $\sigma_Q^K(u) = \rho_Q^K(u) / \rho_0^0(u)$ son los multipolos normalizados de la matriz de densidad. Teniendo en cuenta que $w_{ul}^{(0)} = 1$, y que los elementos del tensor

geométrico² $\mathcal{T}_0^0(0, \mathbf{\Omega}) = 1$ y $\mathcal{T}_0^0(i, \mathbf{\Omega}) = 0$ (para $i = 1, 2, 3$), llegamos a

$$\tilde{p}_i = \frac{\sum_Q w_{ul}^{(2)} \mathcal{T}_Q^2(i, \mathbf{\Omega}) \sigma_Q^2(u)}{1 + \sum_Q w_{ul}^{(2)} \mathcal{T}_Q^2(0, \mathbf{\Omega}) \sigma_Q^2(u)} \quad (6.5)$$

Dado que la polarización generada en los procesos de *scattering* es polarización lineal, la polarización fraccional que nos interesa será la de Stokes Q y U :

$$\tilde{p}_Q = \frac{\tilde{\varepsilon}_Q}{\tilde{\varepsilon}_I} \quad , \quad \tilde{p}_U = \frac{\tilde{\varepsilon}_U}{\tilde{\varepsilon}_I} \quad (6.6)$$

de forma que, tomando la expresión 6.5, y particularizándola para Q ($i = 1$) nos queda

$$\tilde{p}_Q = \frac{w_{ul}^{(2)} \sum_Q \mathcal{T}_Q^2(1, \mathbf{\Omega}) \sigma_Q^2(u)}{1 + \sum_Q \mathcal{T}_Q^2(0, \mathbf{\Omega}) \sigma_Q^2(u)} \quad (6.7)$$

y para U ($i = 2$)

$$\tilde{p}_U = \frac{w_{ul}^{(2)} \sum_Q \mathcal{T}_Q^2(2, \mathbf{\Omega}) \sigma_Q^2(u)}{1 + \sum_Q \mathcal{T}_Q^2(0, \mathbf{\Omega}) \sigma_Q^2(u)} \quad (6.8)$$

Estas serán las expresiones que utilizaremos para calcular las señales de polarización por scattering.

6.2 Implementación y cálculo de las señales de polarización

Para realizar el cálculo de las señales de polarización hemos desarrollado un código en *Python* el cual, para unos parámetros dados, nos devuelve como resultado esas señales.

Paso a paso, el código hace lo siguiente:

- Lee los datos de la transición (momentos angulares, longitud de onda central, la fuerza de oscilador,...) y calcula el coeficiente de Einstein B_{lu} a partir de ellos usando la expresión 5.17.
- Lee los parámetros físicos, entre ellos los de la función fuente exponencial, a partir de los cuales calcula la intensidad según las ecuaciones 5.47 y 5.48 para hallar J_0^0 y J_0^2 mediante la cuadratura de Gauss-Legendre (ecs.

²En Landi Degl'Innocenti & Landolfi (2004) se encuentran todas las componentes del tensor expresadas según el rango (hasta $K = 2$) – ver Tabla 5.6, en pág 211.

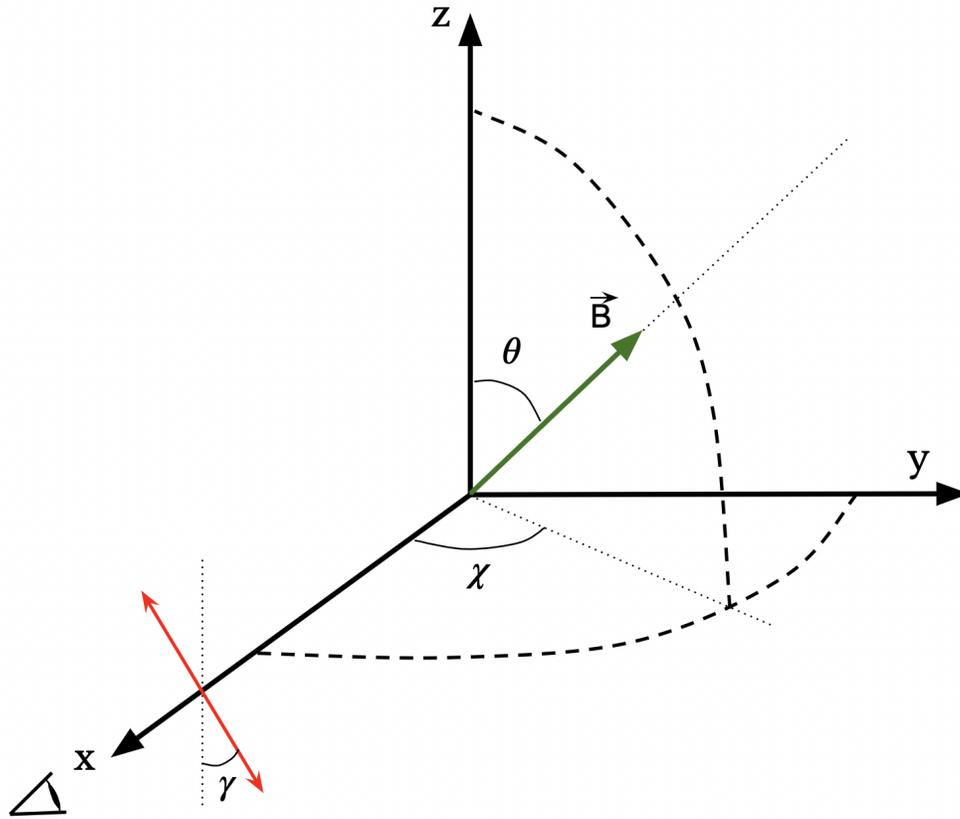


Figura 6.1: Sistema de referencia del problema. El vector campo magnético lo hemos representado en verde y la dirección de la polarización por scattering en rojo. El ángulo γ es el ángulo formado entre la dirección de la polarización y la vertical, haciendo $\gamma = 90^\circ$ estamos situando la dirección de la polarización de Stokes Q en el plano xy .

5.42, 5.43 y 5.44). Con ellos calcula el factor de anisotropía a partir de la definición (ec. 5.27) y el número promedio de fotones (ec. 5.26).

- Construye la matriz de coeficientes de la expresión 5.37 según los coeficientes presentados en las tablas 5.2 y 5.3, teniendo en consideración la ecuación de conservación (5.36).
- Resuelve las EEE a partir de la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes mediante una descomposición LU (del inglés *Lower-Upper*). Para ello, dado un sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, primero se factoriza la matriz de coeficientes como un producto de una matriz triangular inferior por una superior, de forma que

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \rightarrow \mathbf{LU}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Con el cambio $\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{x}$, resuelve el sistema en dos pasos. Primero, obtiene las soluciones para \mathbf{y} con el sistema $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y, después, haciendo uso de ellas, obtiene los valores de \mathbf{x} con $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. De esta forma, lo que hace es dividir el sistema en dos, cuyas matrices de coeficientes son triangulares y, por tanto, los sistemas serán escalonados.

- Conocidos los elementos de la matriz de densidad, calcula la polarización lineal fraccional según las ecuaciones 6.7 y 6.8, donde los elementos del tensor geométrico se obtienen de la tabla 5.6 de Landi Degl’Innocenti & Landolfi (2004). Vamos a analizar el caso de scattering a 90° , en particular, a lo largo del eje x . Por tanto, para alinear el sistema de referencia con la dirección del scattering, debemos aplicar una rotación que, descrita en términos de ángulos de Euler, viene dada por $\mathbf{\Omega} = (90^\circ, 0^\circ, 90^\circ)$. De esta forma, estaremos observando la radiación dispersada a lo largo del eje x . Estableciendo el valor de $\gamma = 90^\circ$, estamos fijando la dirección de la polarización de Stokes Q .

En la figura 6.1 hemos representado la geometría del problema. El campo magnético tiene una inclinación θ y un azimuth χ respecto al sistema del campo de radiación (x, y, z) . Además puede apreciarse cómo está definido el ángulo γ y, en base a él, vemos que la dirección de Stokes Q^+ queda definida en el plano xy , mientras que la de Stokes Q^- perpendicular a él.

6.3 Influencia del factor de anisotropía y del número promedio de fotones en las señales de polarización para la línea de Mg I b2

Vamos a estudiar cómo influyen el factor de anisotropía ω y el número promedio de fotones en la unidad de ángulo sólido \bar{n} en las señales de polarización por scattering.

Analíticamente, estos parámetros intervienen en las EEE, de forma que su influencia lo que hará será modificar los elementos de la matriz de densidad (ver ecuaciones 5.29 - 5.34). Atendiendo a estas ecuaciones, vemos que el factor de anisotropía modificará los ritmos de transferencia y relajación haciéndolos crecer o decrecer en función del valor de Q . No podemos, por tanto, obtener una interpretación clara de la influencia de este parámetro a partir de las EEE.

Para poder obtener información sobre cómo influyen estos parámetros, usaremos diagramas de polarización, que son representaciones de las señales de polarización \tilde{p}_Q frente a las señales en \tilde{p}_U . Realizaremos el cálculo para la línea

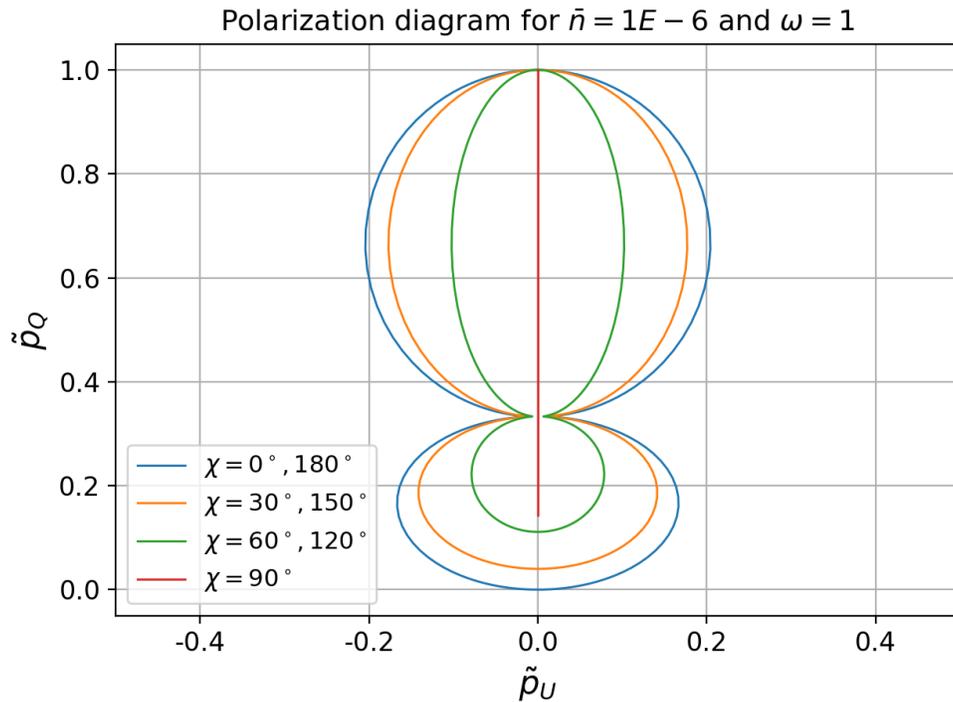


Figura 6.2: Diagramas de polarización para la línea de Mg I b2 fijando $\bar{n} = 10^{-6}$ y $\omega = 1$. Se han realizado variaciones de intensidad de campo magnético entre 10^{-8} G y 100 G para ángulos azimutales de 0° a 180° en intervalos de 30° .

de Mg I b2 y, como se trata de una transición de $J_l = 1, J_u = 1$, partiremos del caso presentado por [Landi Degl'Innocenti & Landolfi \(2004\)](#) en la figura 10.7 (pág. 549), donde los autores establecen $\omega = 1$ y $\bar{n} = 10^{-6}$ y hacen variaciones de la intensidad del campo magnético para valores de azimuth χ constante³.

Bajo estas condiciones, podemos ver en la figura 6.2 que reproducimos con bastante exactitud la figura presentada por los autores, por tanto vamos a considerarla como punto de referencia para nuestro estudio. En ella podemos apreciar que el diagrama está constituido por dos lóbulos. El de arriba, más alargado e intenso, que corresponde a las señales de polarización del nivel inferior, y el de abajo, menos excéntrico y formado por señales más débiles, que corresponde a la polarización del nivel superior. Además, cabe apuntar que en esta figura el campo magnético aumenta su intensidad hacia abajo, de forma que el nudo entre ambos lóbulos corresponde al valor de saturación del

³En la figura de [Landi Degl'Innocenti & Landolfi \(2004\)](#) también se realizan variaciones de azimuth a campo constante, pero nosotros solo estudiaremos las variaciones de campo.

nivel inferior. Este valor lo hallamos de la condición

$$2\pi\nu_L g_l \sim B_{lu} J_0^0 \rightarrow B_{sat}(l) \sim \frac{B_{lu} J_0^0 \times 10^{-7}}{0.879 g_l} \approx 2.56 \bar{n} \text{ G} \quad (6.9)$$

que como vemos, depende del valor del número promedio de fotones \bar{n} , donde para $\bar{n} = 10^{-6}$ obtenemos un campo de saturación del nivel inferior de $B_{sat}(l) \approx 2.56 \times 10^{-6} \text{ G}$. Para el nivel superior no ocurre esto, y obtenemos un campo de saturación que no depende de las características del campo de radiación, solo de la transición. La condición para hallarlo en este caso viene dada por

$$2\pi\nu_L g_u \sim A_{ul} \rightarrow B_{sat}(u) \sim \frac{A_{ul} \times 10^{-7}}{0.879 g_u} \quad (6.10)$$

donde obtenemos para esta transición del magnesio el valor $B_{sat}(u) \approx 1.91 \text{ G}$, que en el diagrama corresponde con la parte más inferior del lóbulo menor.

Otra característica que apreciamos en la figura es que para campos con azimuth $\chi = 90^\circ$ no hay señales de polarización de \tilde{p}_U , pero sí de \tilde{p}_Q . Esto ocurre porque la radiación reemitida por el átomo es perpendicular al campo y la dirección de la polarización en Stokes Q^- tiene la misma dirección que la propagación, por tanto no podemos detectarla. La polarización en Stokes U es nula porque las direcciones de U^+ y U^- yacen en el mismo plano pero en sentidos opuestos, por tanto se cancelan.

6.3.1 Estudio del factor de anisotropía

El caso presentado al comienzo de esta sección corresponde a uno de los límites para el factor de anisotropía, el de un haz unidireccional de radiación a lo largo de la vertical. Vamos a ver ahora el caso extremo opuesto: un campo de radiación radial ($\omega = -1/2$) donde, tomando el caso previo como referencia, mantenemos el valor de $\bar{n} = 10^{-6}$.

Como vemos en la figura 6.3, toda la polarización en \tilde{p}_Q es negativa. Esto quiere decir que la radiación dispersada por los átomos estará polarizada linealmente en la dirección de la vertical z que, en nuestro sistema de referencia, corresponde con Stokes Q^- . La polarización de \tilde{p}_U , al igual que en el primer caso, es simétrica respecto al 0, por lo que recibiremos la misma cantidad de radiación polarizada en Stokes U^+ y Stokes U^- .

Otro aspecto a destacar en la figura es la "mezcla" de lóbulos al modificar el azimuth χ , lo que se interpreta como un cambio del campo magnético de saturación del nivel inferior. En este caso, dado que las señales son negativas, la intensidad de campo aumenta hacia arriba. Por tanto, cuanto mayor es el ángulo azimutal, menor es la intensidad de campo a la que satura el nivel. Esto

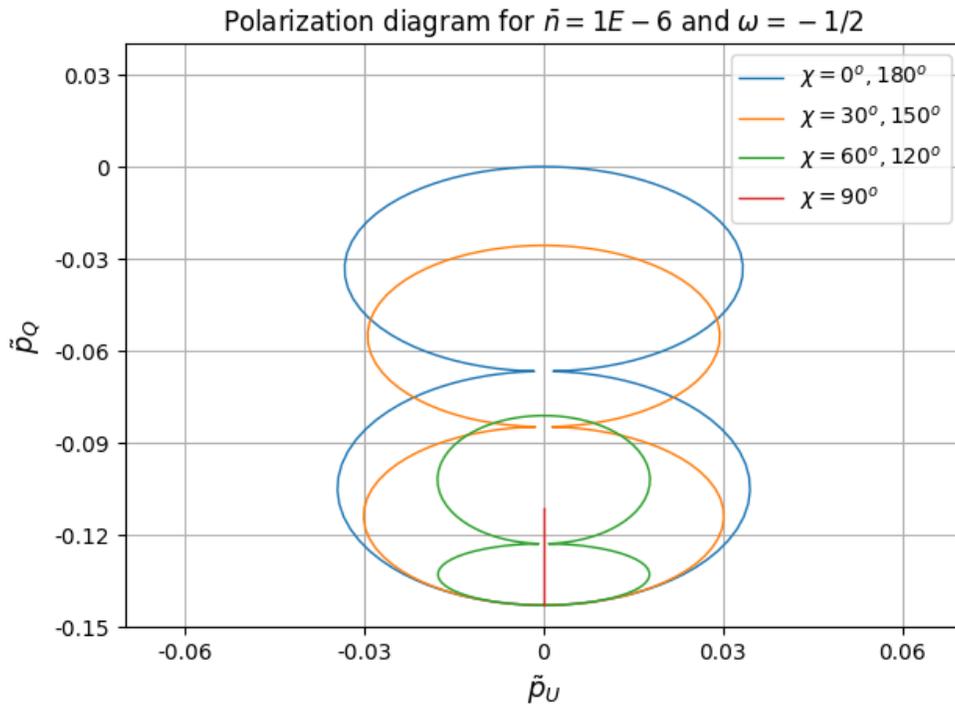


Figura 6.3: Diagramas de polarización para la línea de Mg I b2 fijando $\bar{n} = 10^{-6}$ y $\omega = -1/2$. Se han realizado variaciones de intensidad de campo magnético entre 10^{-8} G y 100 G para ángulos azimutales de 0° a 180° en intervalos de 30° .

se debe a que la componente del campo magnético que modifica las señales de polarización son las que están alineadas con la línea de visión. A campo constante, al aumentar χ , la componente longitudinal del campo magnético se hace menor.

En el caso de un campo de radiación isótropo ($\omega = 0$) no obtendríamos señales de polarización, ya que los niveles atómicos estarían poblados de forma compensada (no habría radiación que los polarice) y reemitirían la radiación sin perturbar su estado de polarización. Por tanto, podemos ver que al reducir el factor de anisotropía desde su valor máximo ($\omega = 1$ – haz unidireccional anisótropo y vertical) hasta el mínimo ($\omega = -1/2$ – campo radial anisótropo) se reduce la intensidad de las señales de polarización por scattering hasta ser nulas, momento en el que el campo de radiación pasa a ser radial y se generan señales negativas en \tilde{p}_Q , las cuales comienzan a aumentar (en valor absoluto) a medida que el factor es más negativo.

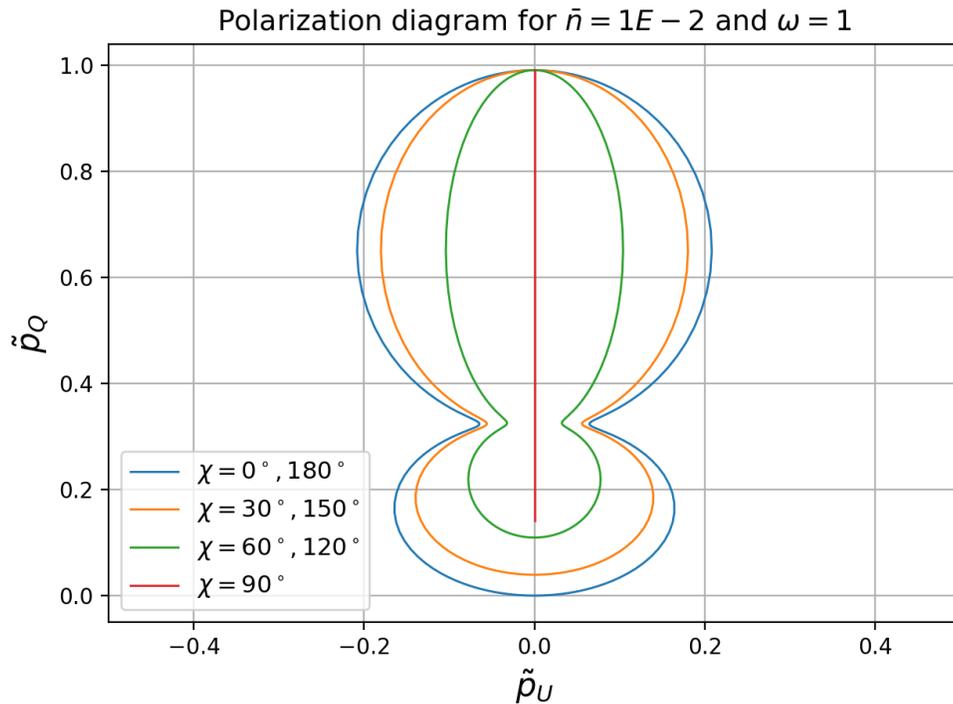


Figura 6.4: Diagramas de polarización para la línea de Mg I b2 fijando $\bar{n} = 10^{-2}$ y $\omega = 1$. Se han realizado variaciones de intensidad de campo magnético entre 10^{-8} G y 100 G para ángulos azimutales de 0° a 180° en intervalos de 30° .

6.3.2 Estudio del número promedio de fotones

Pasamos ahora a analizar la influencia del promedio de fotones en el ángulo sólido \bar{n} sobre nuestras señales de polarización. Partimos nuevamente del caso de referencia (Fig. 6.2) y, manteniendo el factor de anisotropía a $\omega = 1$, vamos a aumentar el valor de \bar{n} y ver cómo varían los diagramas de polarización.

La figura 6.4 muestra los diagramas de polarización para el caso $\bar{n} = 0.01$, donde podemos apreciar cómo al aumentar el orden de magnitud del parámetro las señales son prácticamente iguales pero los lóbulos del diagrama comienzan a abrirse. Como hemos mencionado anteriormente, el campo de saturación del nivel inferior depende del valor de este parámetro \bar{n} y, para este caso, vale $B_{sat}(l) \approx 2.56 \times 10^{-2}$ G. Lo que está ocurriendo es que la contribución del nivel inferior no llega a saturar cuando el superior ya está generando polarización y por ello los lóbulos comienzan a unirse.

Si aumentamos aún más el valor del promedio de fotones hasta $\bar{n} = 1$ (Figura 6.5) encontramos que, el lóbulo inferior desaparece completamente y, además, se reducen los valores máximos de las señales respecto del caso de

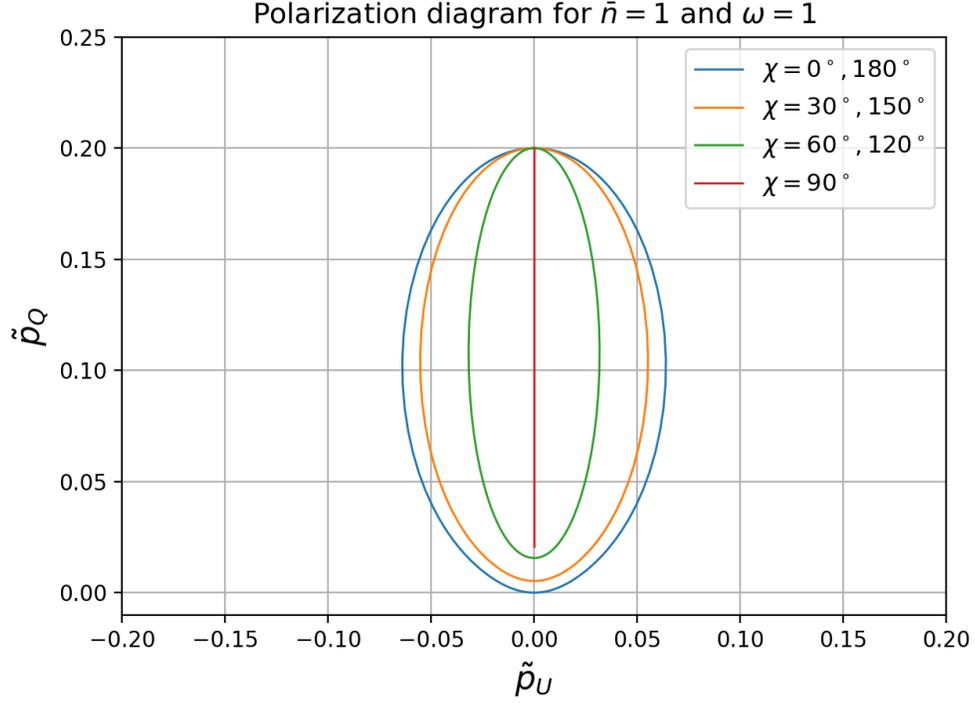


Figura 6.5: Diagramas de polarización para la línea de Mg I b2 fijando $\bar{n} = 1$ y $\omega = 1$. Se han realizado variaciones de intensidad de campo magnético entre 10^{-8} G y 100 G para ángulos azimutales de 0° a 180° en intervalos de 30° .

referencia hasta en un 80% en \tilde{p}_Q y casi un 70% en \tilde{p}_U . Esto ocurre porque se mezclan las contribuciones Hanle de ambos niveles debido a que el orden de magnitud de las vidas medias o, lo que es lo mismo, el campo de saturación de ambos niveles son ahora similares. Teníamos para el nivel superior un valor $B_{sat}(u) \approx 1.91$ G y para este caso, el del nivel inferior es de $B_{sat}(l) \approx 2.56$ G.

6.4 La línea de Mg I b2 en una atmósfera mME

Habiendo estudiado cómo influyen el factor de anisotropía ω y el número promedio de fotones en la unidad de ángulo sólido \bar{n} sobre las señales de polarización, vamos a obtener ahora el diagrama del Mg I b2 en una atmósfera mME. Para ello, tomamos los parámetros de la función fuente de la tabla 3.1 y, a partir de ellos, calculamos el factor de anisotropía y el promedio de fotones en la unidad de ángulo sólido en función de la escala de profundidad óptica

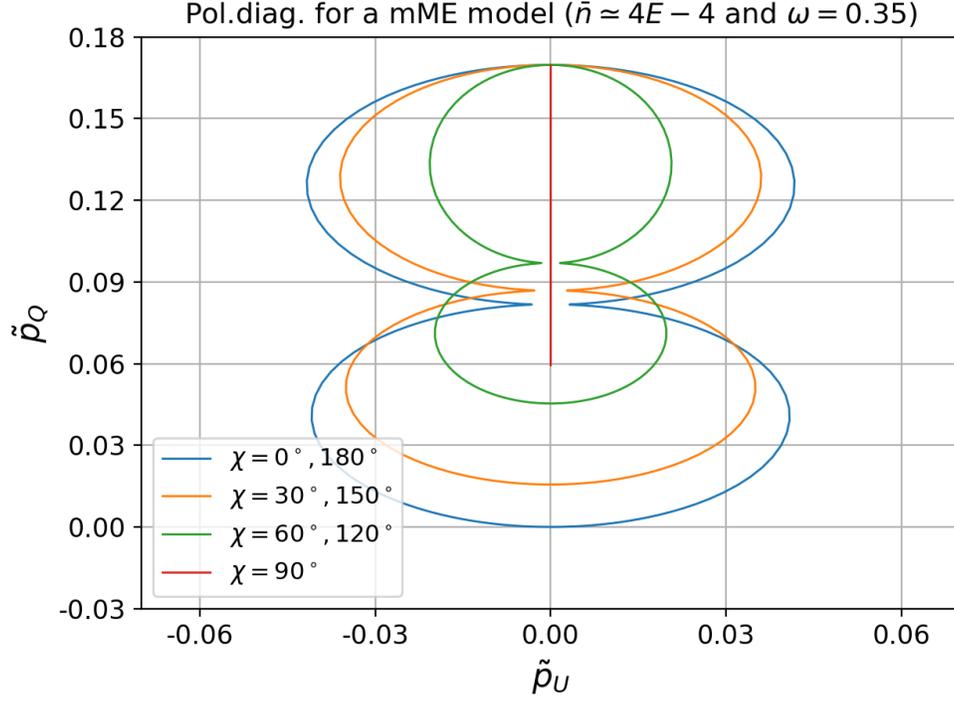


Figura 6.6: Diagramas de polarización para la línea de Mg I b2 en una atmósfera mME. Los parámetros de la función fuente son los de la tabla 3.1. Se han realizado variaciones de intensidad de campo magnético entre 10^{-8} G y 100 G para ángulos azimutales de 0° a 180° en intervalos de 30° .

τ . Dado que estimamos la formación esta línea a $\log \tau = -3.0$ (ver Sec.4.3.1), tomaremos estos valores a dicha profundidad óptica. Una vez hallados, resolveremos las EEE para hallar los multipolos de la matriz de densidad de los niveles y calcular las señales de polarización en función de la configuración de campo magnético igual que en la sección anterior.

En la figura 6.6 hemos representado los diagramas de polarización para el modelo mME. Comparándolo con la figura 6.3 vemos que son prácticamente iguales, solo que tienen simetría de reflexión en el eje $x = 0$. Atendiendo a los valores de anisotropía y promedio de fotones obtenidos, este resultado tiene bastante sentido, ya que, la anisotropía a la altura de formación de la línea es $\omega = 0.353$ (ver Fig. 5.27) y el promedio de fotones es del orden de $\bar{n} \sim 10^{-4}$. Estos valores dan unas condiciones muy similares a las del caso de estudio, con la salvedad de que el campo de radiación no es radial como en el caso de la figura 6.3, si no vertical, y por ello las señales de \tilde{p}_Q son positivas. De ahí que los diagramas tengan esa reflexión respecto al 0 que mencionamos.

Para este caso hemos representado, además, en la figura 6.7 la parte real

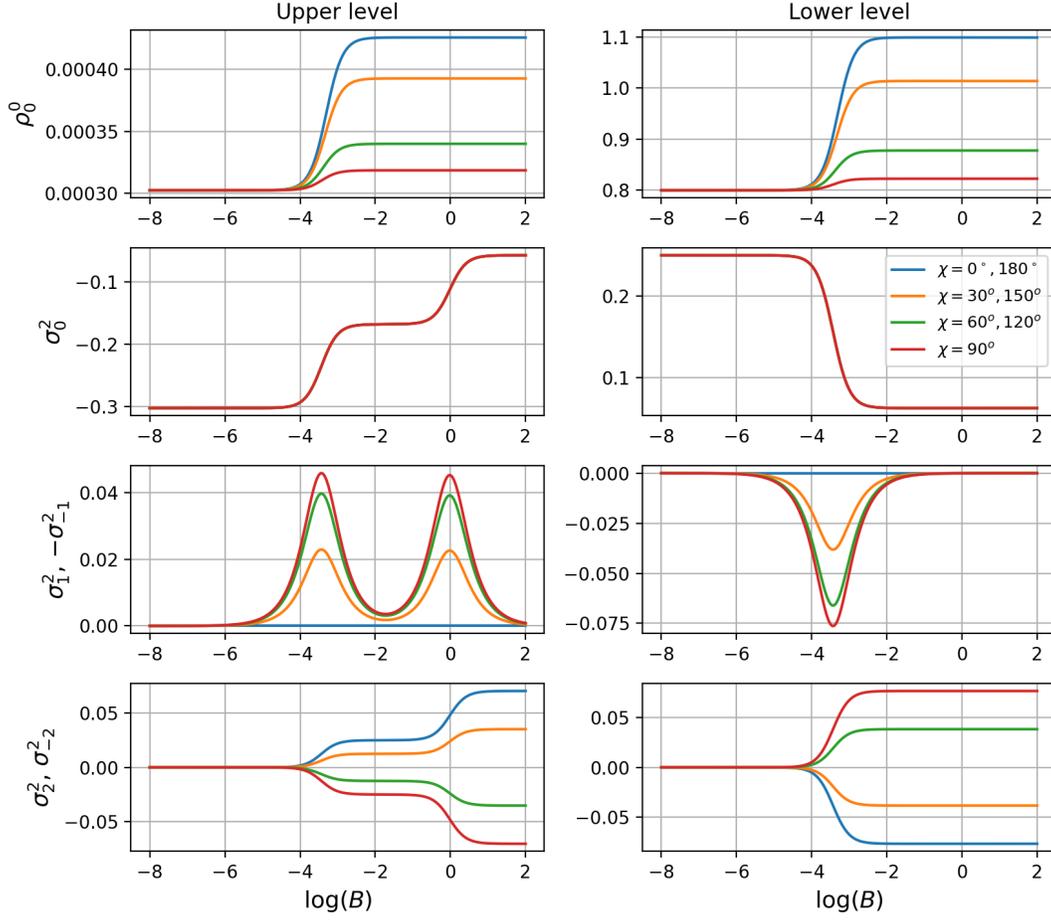


Figura 6.7: Parte real de los multipolos de la matriz de densidad σ_Q^K frente al logaritmo del campo magnético para un modelo mME bajo las mismas configuraciones de campo descritas previamente. Podemos apreciar las regiones de influencia Hanle en los intervalos $(-5, -2.5)$ y $(-1.5, 1)$.

de los multipolos de la matriz de densidad para cada ángulo azimutal respecto a los valores de intensidad de campo magnético. Las regiones de influencia Hanle son aquellas para las cuales el campo magnético modifica las poblaciones. Vemos que, para el nivel superior, donde teníamos un valor de saturación del campo $B_{sat}(u) \approx 1.91$ G ($\log B \approx 0.3$), el efecto Hanle modifica la distribución de las poblaciones hasta alcanzar dicho valor de saturación, donde ya no cambian por mucho que aumentemos el campo. Ocurre lo mismo para el nivel inferior donde, en este caso, el campo de saturación que obtenemos es $B_{sat}(l) \approx 0.001$ G ($\log B \approx -3.0$).

Cabe destacar que, para ambos niveles, si atendemos a la figura 6.7, cuanto mayor es el ángulo azimutal, antes se alcanza la saturación, por tanto, el campo

de saturación se reducirá ligeramente. Tal y como apuntamos en el caso de la figura 6.3, en el diagrama de polarización esto se ve igualmente reflejado, para el nivel inferior en el estrechamiento, y para el superior en el valor mínimo de los lóbulos, que se dan a una \tilde{p}_Q mayor cuanto mayor es χ .

Conclusiones y Trabajo Futuro

En este trabajo hemos presentado una modificación de la aproximación Milne-Eddington que nos permite interpretar líneas cromosféricas tales como la de Mg I b2 y la de Ca II 854.2 nm. Esta aproximación ya fue estudiada por [Lites et al. \(1988\)](#) en modelos cromosféricos realistas, sin embargo, pensamos que no se llevó a cabo con la suficiente profundidad. Retomar esta aproximación, hacer un estudio detallado de las funciones respuesta y llevarla a la práctica nos proporcionaría una interpretación más rápida y simple de las observaciones espectropolarimétricas de la cromosfera, frente a las inversiones NETL. Del análisis llevado a cabo concluimos que:

1. Las funciones respuesta mME sugieren que los *trade-offs* entre las del vector campo magnético, la velocidad de la línea de visión y los parámetros termodinámicos son despreciables y, por tanto, permiten a los modelos mME distinguir las contribuciones de cada una de estas magnitudes.
2. A diferencia de [Lites et al. \(1988\)](#), al menos son necesarias dos exponenciales en la función fuente para reproducir la forma de los perfiles cromosféricos.
3. La aproximación mME es capaz de reproducir perfiles de Stokes emergentes y simétricos de modelos atmosféricos estándar y de determinar el vector de campo magnético con bastante precisión, aunque los modelos mME inferidos muestran ligeras desviaciones en la determinación de intensidades de campo para inclinaciones en torno a los 90°.
4. Aunque la estratificación de la función fuente mME y la de la función fuente del modelo original son muy similares (ambas decrecen monótonamente con la profundidad óptica), hay ciertas discrepancias. En particular, la función fuente mME presenta claras jorobas que, aunque permiten el ajuste de los perfiles, no aparecen en la original y carecen de significado físico.
5. De aplicar las diferentes aproximaciones a modelos MHD realistas ([Carlson et al., 2016](#); [Quintero Noda et al., 2018](#)) obtenemos que, aunque mME

y WFA proporcionan resultados similares para la intensidad de campo magnético y su inclinación, la aproximación mME tiene la ventaja de no estar restringida a campos débiles – como WFA – además, interpreta los datos de una forma más exhaustiva. Por ejemplo, mME proporciona información directa sobre la intensidad de campo magnético, inclinación y velocidad, mientras que el WFA solo da mediadas independientes de las componentes longitudinal y transversal del campo magnético.

Más allá de este estudio espectropolarimétrico del mME, hemos explorado la polarización por scattering, un fenómeno que afecta a las líneas cromosféricas y, en concreto, a la línea de Mg I b2. Para ello, hemos obtenido las expresiones para la polarización lineal fraccional, pasando por el planteamiento y resolución de las EEE para los multipolos de la matriz de densidad y del campo de radiación. Hemos estudiado cómo se ven afectadas estas señales por el factor de anisotropía del campo de radiación y el promedio de fotones, de forma que hemos podido dar una mejor interpretación al caso planteado con el magnesio. De aquí concluimos que:

1. Hemos conseguido generar señales de polarización para el Mg I b2, reproduciendo satisfactoriamente los diagramas de polarización presentados por [Landi Degl’Innocenti & Landolfi \(2004\)](#) para la transición $J_l = 1, J_u = 1$ y generando otros nuevos que hemos analizado e interpretado en función de las variaciones introducidas. Dado que en el tratamiento del fenómeno hemos despreciado los efectos de las colisiones, las cuales destruyen la polarización, las señales obtenidas son las máximas que se pueden generar bajo las condiciones físicas que hemos implementado.
2. Los resultados obtenidos para los diagramas de polarización de la línea de Mg I b2 haciendo uso de un modelo mME encajan en el estudio previo realizado, permitiéndonos seguir explorando el fenómeno desde el marco de dicha aproximación mME.

De cara al futuro, en el campo de la Física Solar, la aproximación mME como método de inversión para extraer información de datos espectropolarimétricos deja la puerta abierta a nuevas investigaciones como:

1. El estudio y aplicación de la aproximación mME en regiones activas, donde encontremos concentraciones muy intensas de campo magnético, como manchas o poros.
2. La aplicación de la aproximación mME para el estudio de datos observacionales y la explotación de los resultados que arroje. Esto incluye la

modificación de los códigos para que tengan en cuenta los efectos instrumentales que degradan los datos.

En el caso del estudio de las señales de polarización por scattering queda pendiente como trabajo futuro:

1. Incluir las contribuciones de las emisividades $\varepsilon_{Q,U,V}$ por scattering en el método mME, asumiendo que los nuevos parámetros de Stokes se hallan como suma de los antiguos más un término correspondiente a la polarización lineal fraccional modulada por el perfil de la intensidad mME.
2. Incluir los tres niveles del triplete Mg I b en el estudio, ya que, aunque los efectos entre las transiciones no son relevantes, las poblaciones se ven modificadas, cambiando las señales de polarización (serían menores). En este caso las EEE que habría que resolver serían las de un modelo de átomo de tres niveles (ver [Landi Degl'Innocenti & Landolfi \(2004\)](#), Capítulo 10), donde se esperaría que el sistema de ecuaciones resultante estuviese desacoplado entre dichos niveles, obteniendo una matriz de coeficientes (ec. 5.37) diagonal por bloques.

Hasta ahora, la aproximación Milne-Eddington ha sido usada bajo condiciones de Equilibrio Termodinámico, ya que fuera de ellas no era capaz de reproducir la forma de las líneas generadas. A lo largo de este trabajo hemos explotado dicha aproximación y hemos ampliado sus horizontes, con posibilidad de usarla en condiciones de No Equilibrio Termodinámico, como en la cromosfera, al haber aumentado el número de parámetros libres con la nueva función fuente. Además, hemos visto también que la propia aproximación nos permite abordar el problema de la polarización por scattering, calculando las poblaciones de los niveles que intervienen en una transición y las señales de polarización que generan.

Conclusions and Future Work

In this work we have presented a modification to the classical Milne-Eddington approximation that allows for the interpretation of solar chromospheric lines, such as the Mg I b2 and the Ca II 854.2 nm lines. The mME approximation was already tested by [Lites et al. \(1988\)](#) using realistic chromospheric models; however, in our opinion, this was not done to great extent. Here, we have recycled the mME approximation, performing a detailed study of the response functions and putting it into practice, since it allows for a faster and simpler interpretation of chromospheric spectropolarimetric observations against those provided by full NLTE inversions. From the analysis we have performed we conclude that:

1. The mME response functions suggests that trade-offs between the response functions to the vector magnetic field, the line-of-sight velocity, and the thermodynamic parameters are negligible, allowing inversion codes to disentangle the these magnitudes.
2. At least, two exponential terms in the source function are needed for successfully reproducing chromospheric profile shapes unlike [Lites et al. \(1988\)](#).
3. The mME approximation is able to reproduce chromospheric Stokes profiles emerging from standard atmospheric models and to determine the vector magnetic field rather accurately. The inferred mME model shows slight deviations in the determination of the field strength for inclination values at around 90° .
4. Although the mME source function shows similar behavior with optical depth as those computed from the original atmospheric model (i.e., it generally decreases monotonically with optical depth), it does present clear deviations. In particular, the mME source function presents clear humps that cannot be found in the original one. The humps in the mME source function allow for the profile shape to be fit but carry negligible physical meaning.

5. The results of applying different approximations to realistic MHD models (Carlsson et al., 2016; Quintero Noda et al., 2018) show that even though both the mME and WFA give similar results for the magnetic field strength and inclination, the mME is not restricted to weak magnetic fields – unlike WFA – and also interprets the data in a more comprehensive manner. For instance, the mME provides direct information about magnetic field strength, inclination, or velocity fields – unlike the WFA, which only provides independent measurements for the longitudinal and transverse components of the field vector.

Beyond the spectropolarimetric study of the mME approximations, we have explored the scattering polarization, a phenomenon which affects to chromospheric lines, specially, to Mg I b2. We have developed the equations for fractional linear polarization, and also presented and solved the Statistical Equilibrium Equations for density matrix and radiation field multipole moments. We have studied how these signals are affected by the anisotropy factor and the solid-angle average of the number of photons. Thus we have been able to give a better interpretation of the results of the magnesium line. From the study of the scattering polarization, we conclude that:

1. We have generated polarization signals for Mg I b2, reproducing polarization diagrams presented by Landi Degl’Innocenti & Landolfi (2004) for a $J_l = 1, J_u = 1$ transition. We have also generated other new diagrams giving an interpretation of the variations included. In the treatment of this phenomenon we have considered the effects of the collisions negligible, so polarization signals obtained are supposed to be the maximum under the implemented physical conditions.
2. The results obtained for Mg I b2 polarization diagrams using an mME model agree with previous results. It allows us to explore scattering polarization by mean of this approximation.

The mME approximation as an inversion tool to obtain information from spectropolarimetric data opens the door to new investigations in Solar Physics as:

1. The study and application of mME approximation in active regions, where we can find very strong magnetic fields, as spots or pores.
2. The use of mME approximation to study observational data. This includes the modification of the codes in order to consider instrumental effects which degrades data.

In the case of the study of scattering polarization signals, future work remains to be done:

1. Include the contributions of the scattering emissivities $\varepsilon_{Q,U}$ in the mME method. It is done assuming that the new Stokes parameters are found as the sum of the old ones plus a term corresponding to the fractional linear polarization modulated by the mME intensity profile.
2. Include the three levels of the Mg I b triplet in the study. Although the effects between the transitions are not relevant, the populations are modified, changing the polarization signals (they would be smaller). In this case the SEE that would have to be solved would be those of a three-level atom model (see [Landi Degl’Innocenti & Landolfi \(2004\)](#), Chapter 10). We would expect that the resulting system of equations to be decoupled between these levels, obtaining a block-diagonal matrix of coefficients (eq. 5.37).

So far, the Milne-Eddington approximation has been used under Thermodynamic Equilibrium conditions, since outside them it was not able to reproduce the shape of the lines. Throughout this work we have exploited this approximation and we have extended its horizons. Now we have the possibility of using it under Non-Thermodynamic Equilibrium conditions, as in the chromosphere, since we have increased the number of free parameters with the new source function. Moreover, we have also seen that the approximation itself allows us to address the problem of scattering polarization. It can be used to calculate the populations of the levels involved in a transition and the polarization signals they generate.

Bibliography

- Carlsson, Mats 2007, *Physics of Chromospheric Plasmas*, ASP, 368, 47
doi:10.48550/arXiv.0704.1509
- Carlsson, Mats, Hansteen, Viggo H., Gudiksen, Boris V., Leenaarts, Jorrit & De Pontieu, Bart 2016, A&A, 585, A4. doi:10.1051/0004-6361/201527226
- Centeno, R. 2018, ApJ, 866, 89. doi:10.3847/1538-4357/aae087
- Chandrasekhar, S. 1960, *Radiative Transfer*. Dover Publications.
- del Toro Iniesta, J. C. 2003, *Introduction to Spectropolarimetry*. Cambridge: Cambridge University Press.
- del Toro Iniesta, J. C., Orozco Suárez, D., & Bellot Rubio, L. R. 2010, ApJ, 711, 312. doi:10.1088/0004-637X/711/1/312
- del Toro Iniesta, J. C. & Ruiz Cobo, B. 2016, Living Reviews in Solar Physics, 13, 4. doi:10.1007/s41116-016-0005-2
- Dorantes-Montenegro, A. J., Siu-Tapia, A. L., Quintero-Noda, C. & Orozco Suárez, D. 2022, A&A, 659, A156. doi:10.1051/0004-6361/202142810
- Fletcher, L., Turkmani, R., Hudson, H. S., Hawley, S. L., Kowalski, A., Berlicki, A. & Heinzel, P. 2010, arXiv. doi:10.48550/ARXIV.1011.4650
- Fontenla, J. M., Avrett, E. H., & Loeser, R. 1993, ApJ, 406, 319. doi:10.1086/172443
- Gudiksen, B. V., Carlsson, M., Hansteen, V. H., Hayek, W., Leenaarts, J., & Martínez-Sykora, J. 2011, A&A, 531, A154. doi:10.1051/0004-6361/201116520
- Jefferies, J. ; Lites, B. W. ; Skumanich, A. 1973, ApJ, 343, 920. doi:10.1086/167762

- Jennerholm Hammar, F. 2014, *Inference of chromospheric magnetic fields with the Ca II 8542 line* (Dissertation), oai:DiVA.org:uu-238863, Retrieved from <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:uu:diva-238863>
- Landi Degl'Innocenti, E. & Landi Degl'Innocenti, M. 1973, *Sol. Phys.*, 31, 299. doi:10.1007/BF00152807
- Landi Degl'Innocenti, E. 1992, In: *Solar observations: Techniques and interpretation* (A93-53183 23-92), p.71, 73-143
- Landi Degl'Innocenti, E. & Landolfi, M. 2004, *Polarization in Spectral Lines*. ASSL, Vol. 307, Kluwer Academic Publishers. doi:10.1007/978-1-4020-2415-3
- Landolfi, M. & Landi Degl'Innocenti, E. 1982, *Sol. Phys.*, 78, 355. doi:10.1007/BF00151615
- Lites, B. W., Skumanich, A., Rees, D. E., et al. 1987, *ApJ*, 318, 930. doi:10.1086/165425
- Lites, B. W., Skumanich, A., Rees, D. E., et al. 1988, *ApJ*, 330, 493. doi:10.1086/166487
- Maltby, P., Avrett, E. H., Carlsson, M., et al. 1986, *ApJ*, 306, 284. doi:10.1086/164342
- Orozco Suárez, D. & Del Toro Iniesta, J. C. 2007, *A&A*, 462, 1137. doi:10.1051/0004-6361:20066201
- Priest, E. 2014, *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139020732
- Quintero Noda, C.; Uitenbroek, H.; Carlsson, M.; Orozco Suárez, D.; Katsukawa, Y.; Shimizu, T.; Ruiz Cobo, B.; Kubo, M.; Oba, T.; Kawabata, Y.; Hasegawa, T.; Ichimoto, K.; Anan, T. & Suematsu, Y. 2018, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 481, Issue 4, p.5675-5686. doi:10.1093/mnras/sty2685
- Rachkovsky, D. N. 1962, *Izvestiya Ordena Trudovogo Krasnogo Znameni Krymskoj Astrofizicheskoj Observatorii*, 28, 259
- Rachkovsky, D. N. 1967, *Izvestiya Ordena Trudovogo Krasnogo Znameni Krymskoj Astrofizicheskoj Observatorii*, 37, 56 1962IzKry..28..259R
- Semel, M. 1967, *Annales d'Astrophysique*, Vol. 30, p.513-513

Stix, M. 2002, *The Sun: An Introduction*, 2nd ed. Springer Berlin, doi: 10.1007/978-3-642-56042-2

Trujillo Bueno, J. 2005, *Proceedings of the 11th European Solar Physics Meeting. The Dynamic Sun: Challenges for Theory and Observations* (ESA SP-600), 11-16 September 2005. Leuven, Belgium. Editors: D. Danesy, S. Poedts, A. De Groof and J. Andries. Published on CDROM., id.7.1

Uitenbroek, H. 2001, *ApJ*, 557, 389. doi:10.1086/321659

Uitenbroek, H. 2003, *ApJ*, 592, 1225. doi:10.1086/375736

Unno, W. 1956, *PASJ*, 8, 108

Apéndice A

Desarrollo analítico del factor de anisotropía en un modelo mME

Considerando el factor de anisotropía definido en función de las integrales exponenciales (ec. 5.41), para una atmósfera mME, al sustituir la función fuente, tendremos que integrar los términos de la parte lineal (los cuales ya conocemos) y los términos exponenciales, que darán lugar a nuevas integrales de la forma:

$$\int_0^\infty E_n(|\tau - \tau'|)e^{-c\tau'} d\tau' = \int_0^\tau E_n(|\tau - \tau'|)e^{-c\tau'} d\tau' + \int_\tau^\infty E_n(|\tau - \tau'|)e^{-c\tau'} d\tau' \quad (\text{A.1})$$

donde hemos separado las integrales en las correspondientes a radiación incidente y la de radiación emergente y, para nuestro caso $c = \alpha_1, \alpha_2$ y $n = 1, 3$. Realizando el siguiente cambio de variable

$$x = |\tau' - \tau| = \begin{cases} \tau' - \tau \rightarrow dx = d\tau' & \text{si } \tau' > \tau \\ \tau - \tau' \rightarrow dx = -d\tau' & \text{si } \tau' < \tau \end{cases}$$

podemos expresar las integrales como

$$\begin{aligned} \int_0^\infty E_n(|\tau - \tau'|)e^{-c\tau'} d\tau' &= \int_0^\tau E_n(x)e^{c(x-\tau)} dx + \int_0^\infty E_n(x)e^{-c(x+\tau)} dx \\ &= e^{-c\tau} \left[\int_0^\tau E_n(x)e^{cx} dx + \int_0^\infty E_n(x)e^{-cx} dx \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Estas integrales se pueden desarrollar tomando partes de la siguiente forma

$$\begin{aligned} u &= E_n(x) \quad , \quad du = -E_{n-1}(x)dx \\ dv &= e^{\pm cx} dx \quad , \quad v = \pm e^{\pm cx}/c \end{aligned}$$

y nos quedaría

$$\begin{aligned} \int E_n(x)e^{\pm cx} dx &= e^{\pm cx} \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{\pm 1}{c}\right)^{i+1} E_{n-i}(x) \\ &\quad + \left(\frac{\pm 1}{c}\right)^{n-1} \int E_1(x)e^{\pm cx} dx \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Aplicamos esto en [A.2](#) y operamos haciendo uso de las propiedades de las integrales exponenciales¹.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty E_n(|\tau - \tau'|)e^{-c\tau'} d\tau' &= \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{c^{i+1}} e^{c(x-\tau)} E_{n-i}(x) \Big|_0^\tau \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^{i+1}}{c^{i+1}} e^{-c(x+\tau)} E_{n-i}(x) \Big|_0^\infty + \frac{e^{-c\tau}}{c^{n-1}} \int_0^\tau E_1(x)e^{cx} dx \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1} e^{-c\tau}}{c^{n-1}} \int_0^\infty E_1(x)e^{-cx} dx = \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{c^{i+1}} \left[e^{c(x-\tau)} E_{n-i}(x) \Big|_0^\tau + (-1)^{i+1} e^{-c(x+\tau)} E_{n-i}(x) \Big|_0^\infty \right] \\ &\quad + \frac{e^{-c\tau}}{c^{n-1}} \left[\int_0^\tau E_1(x)e^{cx} dx + (-1)^{n-1} \int_0^\infty E_1(x)e^{-cx} dx \right] = \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{c^{i+1}} \left[E_{n-i}(\tau) + (-1)^{i+2} \frac{e^{-c\tau}}{n-i-1} \right] \\ &\quad + \frac{1}{c^{n-1}} \int_0^\infty E_1(|\tau - \tau'|)e^{-c\tau'} d\tau' \end{aligned}$$

donde hemos usado la propia expresión [A.2](#) para reagrupar los términos entre corchetes en la integral. Como vemos, sea cual sea el orden de la integral

¹Las integrales exponenciales $E_n(x)$ satisfacen las siguientes propiedades:

$$\frac{dE_n(x)}{dx} = -E_{n-1}(x) \quad : n > 0 \quad , \quad E_n(0) = \frac{1}{n-1} \quad : n > 1$$

exponencial, siempre acabaremos teniendo una de orden 1, la cual diverge en los puntos que hacen 0 su argumento: $x = 0$ o $\tau' = \tau$, como es nuestro caso.